ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 7 **Februar 1927** **Heft 1**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. K. Bose und L. Prandtl: Beiträge zur Aerodynamik des Doppeldeckers	1
M. Ono: Ueber die Strömungsvorgänge um Kreiszylinder	9
W. Müller: Zylinder in einer unsteten Potentialströmung	13
V. Bjerknes: Die atmosphärischen Störungsgleichungen	17
H. Fromm: Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben	27
H. Pollaczek-Geiringer: Ueber die Gliederung ebener Fachwerke	58
O. Föppl: Berechnung der Biegungsschwingungszahl einer Welle, die mit mehreren Lasten behaftet ist	72
E. Waelsch: Schraubflächen und Nullsystem in kotierten Rissen	77
Kleine Mitteilungen. Faxén: Die Geschwindigkeit zweier Kugeln, die unter Einwirkung der Schwere in einer zähen Flüssigkeit fallen. — Hencky: Eine wichtige Vereinfachung der Methode von Ritz zur angenäherten Behandlung von Variationsproblemen	79
Buchbesprechungen. Handbuch der Physik. — Cranz, Eberhard und Becker: Aeußere Ballistik oder Theorie der Bewegung des Geschosses von der Mündung der Waffe ab bis zum Eindringen in das Ziel. — Hayashi: Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. — Pólya und Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. — Weiter eingegangene Bücher	81
Nachrichten	85
Zuschriften an den Herausgeber	87

HAUPTAUFSÄTZE

Beiträge zur Aerodynamik des Doppeldeckers.

Von **NOLINI KANTO BOSE** in Calcutta. Mit Zusätzen von **L. PRANDTL** in Göttingen.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit war die Untersuchung des Einflusses der Stromlinienkrümmung auf die gegenseitige Einwirkung der zwei Tragflügel eines Doppeldeckers. Dieser Einfluß bringt nämlich gegenüber den Resultaten der Theorie der tragenden Linien [1]) eine Abänderung, die sich vor allem bei der Berechnung des zu einem bestimmten Auftrieb gehörigen Anstellwinkels als wesentlich erweist und die Widersprüche zwischen der Theorie der tragenden Linien und den Versuchen praktisch zum Verschwinden bringt.

Als eine Vorfrucht dieser Rechnung sei zunächst eine Ermittelung der Eigenschaften des Doppeldeckers nach der Theorie der tragenden Linien mitgeteilt. Anstelle der früheren von K. Pohlhausen ausgeführten Berechnung, die mit mechanischen Quadraturen durchgeführt war, konnten hier geschlossene Ausdrücke angegeben werden.

1. Berechnung der induzierten Geschwindigkeit. In der zweiten Mitteilung der Tragflügeltheorie [1]) sind die Ausdrücke für die Störungsgeschwindigkeiten, die eine tragende Linie in irgend einem Raumpunkt A hervorbringt, angegeben. Dafür werde das folgende Koordinatensystem eingeführt. Durch A zieht man eine Linie parallel mit der Richtung der ungestörten Strömung, welche die zu dieser Richtung senkrechte Ebene durch die tragende Linie bei O trifft. O sei Koordinatenanfangspunkt, OA die y-Achse, die Gerade senkrecht zu OA und parallel zur tragenden Linie sei die x-Achse; die z-Achse bekommt man aus der Forderung eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit Rechtsdrehung (Abb. 1). a ist der Abstand des tragenden Linienelementes ds von O, r der von A, x, 0, z sind seine Koordinaten. A hat die Koordinaten 0, y, 0. Die Winkel α und β sind dann definiert durch

$$\sin\,\alpha = \frac{y}{r}\,,\quad \frac{\sin\beta}{x} = \frac{\cos\beta}{z} = \frac{1}{a}\,.$$

[1]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie, 2. Mitt. Nr. 9. Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1919, vgl. auch Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern. Techn. Berichte der Flugzeugmeisterei Bd. III, 1918, Heft 7, wieder abgedruckt in Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, II. Lieferung 1923, S. 9 u. f.

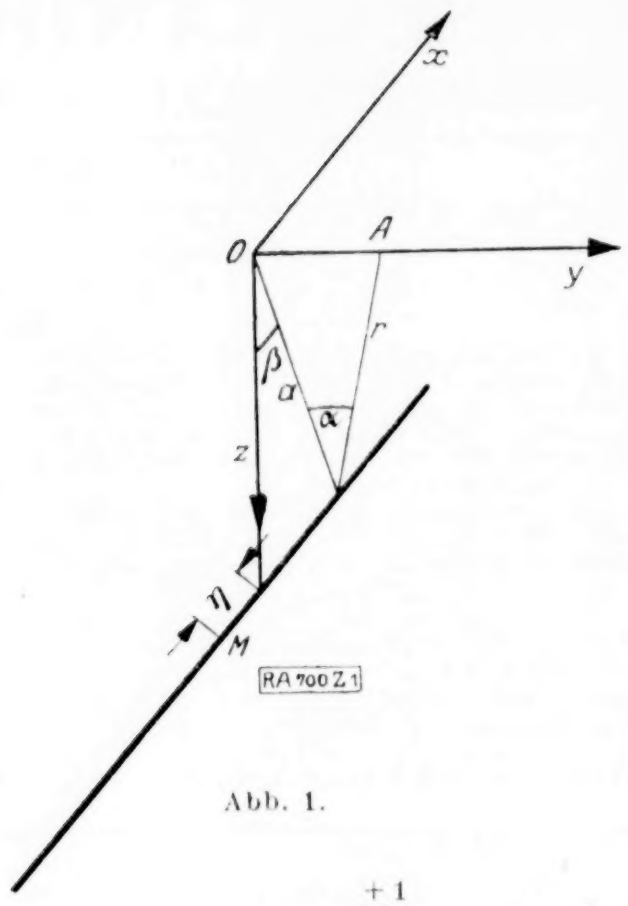


Abb. 1.

Dann erhält man für die Komponenten der Störungsgeschwindigkeit, wenn Γ die Zirkulation kennzeichnet,

$$\left.\begin{aligned} u &= \int \frac{\Gamma\, ds}{4\pi}\left[(1+\sin\alpha)\,\frac{\sin 2\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\,\sin 2\beta}{2\,r^2}\right] \\ v &= -\int \frac{\Gamma\, ds}{4\pi}\,\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{r^2} \\ w &= \int \frac{\Gamma\, ds}{4\pi}\left[(1+\sin\alpha)\,\frac{\cos 2\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\,\cos^2\beta}{r^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

wobei die Integrale über die ganze tragende Linie zu erstrecken sind. Im folgenden wird elliptische Zirkulationsverteilung angenommen:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1-\xi^2};$$

ξ gibt den Abstand des tragenden Elementes von der Mitte der tragenden Linie in Bruchteilen der halben Spannweite l an. Mit η wird der Abstand der Tragflügelmitte von der z-Achse bezeichnet, so daß die x-Koordinate des tragenden Linienelementes $l\,\xi - \eta$ ist. Für die wichtigste Komponente der induzierten Geschwindigkeit w erhält man

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{\Gamma_0 l}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\left[\left(1+\frac{y}{r}\right)\frac{z^2-x^2}{(z^2+x^2)^2} + \frac{y}{r^3}\cdot\frac{z^2}{a^2}\right]\sqrt{1-\xi^2}\,d\xi \\ &= \frac{\Gamma_0 l}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{z^2(1-\xi^2)}{[z^2+(l\xi-\eta)^2]^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\Gamma_0 l}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{(l\xi-\eta)^2(1-\xi^2)}{[z^2+(l\xi-\eta)^2]^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ &+ \frac{\Gamma_0 l}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y\,z^2(1-\xi^2)}{[z^2+(l\xi-\eta)^2]^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\,[z^2+y^2+(l\xi-\eta)^2]}} \\ &- \frac{\Gamma_0 l}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y\,(1-\xi^2)\,(l\xi-\eta)^2}{[z^2+(l\xi-\eta)^2]^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\,[z^2+y^2+(l\xi-\eta)^2]}} \\ &+ \frac{\Gamma_0 l}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y\,z^2(1-\xi^2)}{z^2+(l\xi-\eta)^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\,[z^2+y^2+(l\xi-\eta)^2]^3}} \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Setzen wir $\frac{z}{l}=\lambda$, $\frac{y}{l}=\mu$, $\frac{\eta}{l}=\nu$ und nehmen für y bzw. η den Wert 0 an, so erhält man sofort die Geschwindigkeit w in der vertikalen Ebene durch die tragende Linie

$$w_0 = \frac{\Gamma_0}{4\pi l}\left[\lambda^2\int_{-1}^{+1}\frac{1-\xi^2}{[\lambda^2+(\xi-\nu)^2]^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \int_{-1}^{+1}\frac{(\xi-\nu)^2(1-\xi^2)}{[\lambda^2+(\xi-\nu)^2]^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] \quad (3).$$

Das Integrationsverfahren werde am 1. Integral gezeigt. Zunächst führt man eine neue Variable t ein durch

$$\xi = \frac{q+t}{1+qt},$$

wobei die Zahl q so bestimmt wird, daß das erste Integral

$$\lambda^2\int_{-1}^{+1}\frac{(1-q^2)^{3/2}(1-t^2)(1+qt)}{[\lambda^2(1+qt)^2 - 2\nu(q+t)(1+qt)+\nu^2(1+qt)^2+(q+t)^2]^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

die Form

$$\lambda^2(1-q^2)^{3/2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)(1+qt)}{(A+Bt^2)^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

erhält. Dabei wird

$$A = \lambda^2 + (\nu - q)^2, \quad B = \lambda^2 q^2 - (1 - \nu q^2), \quad q + \frac{1}{q} = \frac{\lambda^2 + \nu^2 + 1}{\nu} \quad . \quad . \quad (4).$$

Die Gleichung für q

$$q^2 - q\,\frac{\lambda^2 + \nu^2 + 1}{\nu} + 1 = 0$$

hat zwei positive Wurzeln, deren Produkt gleich 1 ist, so daß eine Wurzel größer als 1, die andere kleiner als 1 ist. Hier braucht man, damit das Integral reell bleibt, die Wurzel, die kleiner als 1 ist. Das Integral geht in

$$\frac{\lambda^2 (1 - q^2)^{3/2}}{A^2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - t^2}{(1 + m t^2)^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

über, wenn

$$m = \frac{B}{A} = \frac{1 - q\nu}{\nu - q} \cdot q$$

ist, da der andere Bestandteil, wie man leicht sieht, verschwindet. Setzt man

$$t^2 = \frac{x^2}{1 + m - m x^2},$$

so wird das Integral gleich

$$\frac{2\,\lambda^2 (1 - q^2)^{3/2}}{A^2 (1 + m)^{1/2}} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\lambda^2 (1 - q^2)^{3/2}}{A^2 (1 + m)^{1/2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Das zweite Integral berechnet man nach demselben Verfahren. Setzt man zur Abkürzung

$$m = \frac{1 - q\nu}{\nu - q} \cdot q = \operatorname{tg}^2 \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder, da $\lambda^2 q = (1 - q\nu)(\nu - q)$ ist,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - q\nu}{\lambda},$$

so erhält man schließlich

$$w_0 = \frac{\Gamma_0}{4\,l}\left[1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - q^2}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

In der Zahlentafel 1 und der Abb. 2 sind die Werte von $\frac{4\,l}{\Gamma_0} \cdot w_0$ für λ von 0,2 bis 0,6 und ν von 0 bis 2 angegeben. Sie stimmen genau überein mit den Werten, die früher mit Hilfe des Planimeters gefunden sind[1]).

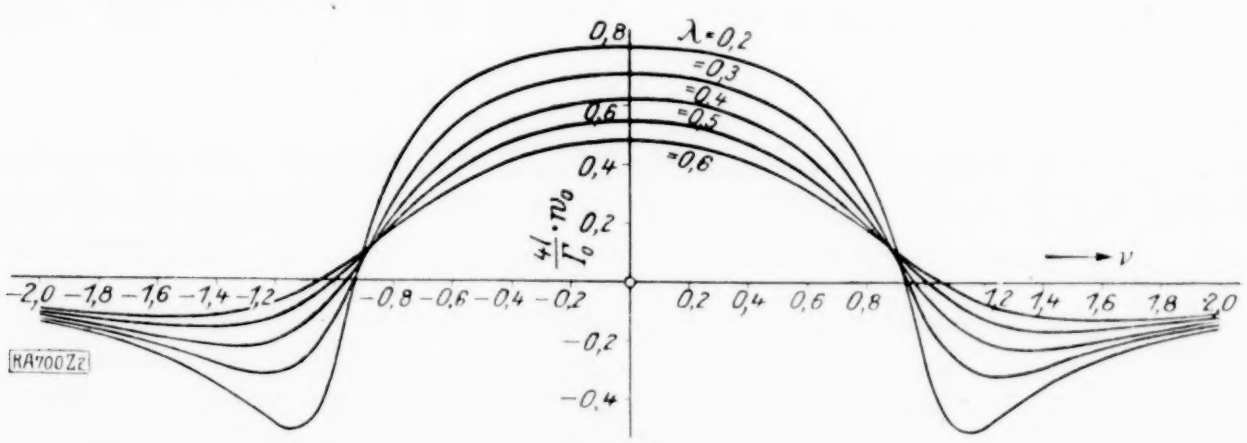


Abb. 2.

2. Einfluß der Stromlinienkrümmung auf den Auftrieb. Das nächste Problem ist, die Wirkung des Abwindes w_0 auf den Auftrieb eines anderen Flügels zu finden. Wie allgemein bekannt, beeinflußt der Abwind eines Flügels seine eigene Tragfähigkeit, d. h. sein Anstellwinkel vermindert sich um $\operatorname{arc\,tg} \frac{w}{V}$, wenn w die Abwärtsgeschwindigkeit am Flügel und V die Geschwindigkeit der freien Strömung ist. Wenn der Flügel nun in ein Gebiet kommt, das schon durch den Einfluß eines anderen Flügels

[1]) Ergebnisse II. Lief. S. 10 bis 11.

Zahlentafel 1.

$$\frac{4\,l}{\Gamma_0}\cdot w_0$$

ν	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$	$\lambda = 0{,}6$
0,0	0,804	0,713	0,629	0,553	0,486
0,1	0,801	0,709	0,626	0,549	0,481
0,2	0,792	0,696	0,613	0,535	0,468
0,3	0,777	0,677	0,589	0,512	0,447
0,4	0,751	0,644	0,554	0,478	0,415
0,5	0,711	0,599	0,502	0,432	0,373
0,6	0,648	0,526	0,435	0,369	0,319
0,7	0,543	0,420	0,342	0,291	0,255
0,8	0,371	0,272	0,225	0,198	0,184
0,9	0,109	0,072	0,087	0,100	0,105
1,0	− 0 291	− 0,130	− 0,045	0,005	0,037
1,1	− 0,489	− 0,266	− 0,144	− 0,074	− 0,025
1,2	− 0,483	− 0,312	− 0,201	− 0,123	− 0,070
1,3	− 0,412	− 0,309	− 0,220	− 0,150	− 0,100
1,4	− 0,351	− 0,284	− 0,222	− 0,162	− 0,116
1,5	− 0,298	− 0,249	− 0,207	− 0,161	− 0,122
1,6	− 0,254	− 0,221	− 0,190	− 0,156	− 0,123
1,7	− 0,218	− 0,196	− 0,174	− 0,146	− 0,120
1,8	− 0,189	− 0,174	− 0,156	− 0,138	− 0,115
1,9	− 0,167	− 0,153	− 0,141	− 0,126	− 0,109
2,0	− 0,149	− 0,139	− 0,127	− 0,116	− 0,102

gestört ist, erleidet sein Auftrieb bei demselben geometrischen Anstellwinkel eine weitere Veränderung.

Für die Abhängigkeit des Auftriebes von den geometrischen Konstanten der Strömung und des Profiles wurde im folgenden die aus den Kuttaschen Rechnungen für die unendlich lange, dünne kreisförmig gewölbte Platte in der reibungslosen Flüssigkeit hergeleitete Näherungsformel für die Auftriebszahl $c_a = \frac{A}{\frac{1}{2}\varrho V^2 \cdot F}$ angesetzt

$$c_a = 2\pi\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

α ist der Anstellwinkel der Profilsehne, deren Länge t ist, β ist der Zentriwinkel des Kreisbogenprofils, der Radius ist R (Abb. 3). Dann ist $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{t}{2R}$, also angenähert

$$c_a = 2\pi\left(\alpha + \frac{t}{4R}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

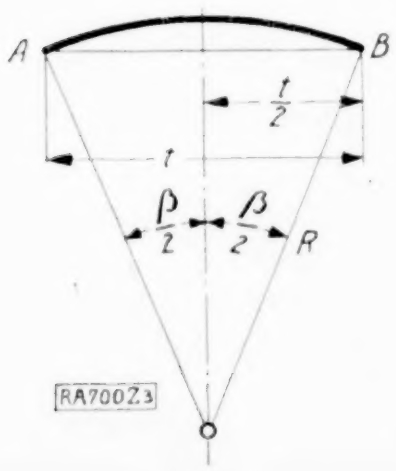


Abb. 3.

Bei dem endlichen Tragflügel, der von einem zweiten beeinflußt wird, wird der Auftrieb nicht nur durch die Wirkung des Abwindes verändert, der von den beiden Flügeln am Ort des ersten erzeugt wird, sondern außerdem noch durch den Umstand, daß der erste Flügel sich in einer durch die Wirkung des zweiten Flügels gekrümmten Strömung befindet. Die Krümmung der Stromlinien äußert sich in zweifacher Hinsicht.

Einmal bleibt die Krümmung des Tragflügelprofils nicht mehr die wirksame Krümmung, sondern die wirksame Krümmung ist gleich der geometrischen Krümmung $1/R$, vermindert um die Krümmung der Strömung $1/R'$. Diese Beziehung muß, wie man sich leicht überzeugt, wenigstens für kleine Krümmungen mit guter Annäherung richtig sein.

Zweitens spielt die Krümmung bei der Ermittlung des wirksamen Anstellwinkels noch eine Rolle, da wegen der Krümmung die Neigung der Strömung an verschiedenen Stellen des Profils verschieden ist. Denkt man sich den Auftrieb des zweiten, störenden Flügels auf einer Linie durch den Druckmittelpunkt konzentriert, so ist in der Vertikalebene durch diese Linie die induzierte Geschwindigkeit w_{21} vorhanden, die unter 1 be-

rechnet wurde. arc tg $\frac{w_{21}}{V}$ gibt dann die Neigung der Stromlinie SS, die am Ort des ersten Flügels ohne diesen, allein durch die Wirkung des zweiten Flügels da wäre, und zwar in dem Punkt senkrecht über D (Abb. 4). A bezeichnet den Ort der Eintrittskante, B den Ort der Austrittskante des ersten Flügels, die gestrichelte Linie die Stromliniensehne. Nun waren in den Formeln (7), (8) die Anstellwinkel auf die Sehne des Kreisbogenprofiles bezogen, so daß man von dem geometrischen Anstellwinkel die Neigung der Sehne der Stromlinie SS abziehen muß, um den wirksamen Anstellwinkel zu bekommen. Mit hier genügender Genauigkeit kann für die Neigung der Sehne die Neigung der Tangente der Stromlinie in der Mitte des Profiles bei M gssetzt werden. Wenn D den wagerechten Abstand e von M hat, so muß also zu der Anstellwinkelkorrektur $\frac{w_{21}}{V}$, die man nur durch den Abwind des zweiten Flügels erklären kann, noch der Winkel e/R' hinzugefügt werden. Ist die vom Flügel 1 selbst induzierte Geschwindigkeit w_{11}, und setzt man $w_{11}+w_{21}=w_1$, und den geometrischen Anstelwinkel des ersten Flügels gleich α_1, so wird demnach der wirksame Anstellwinkel gleich $\alpha_1 - \frac{w_1}{V} - \frac{e}{R'}$ und

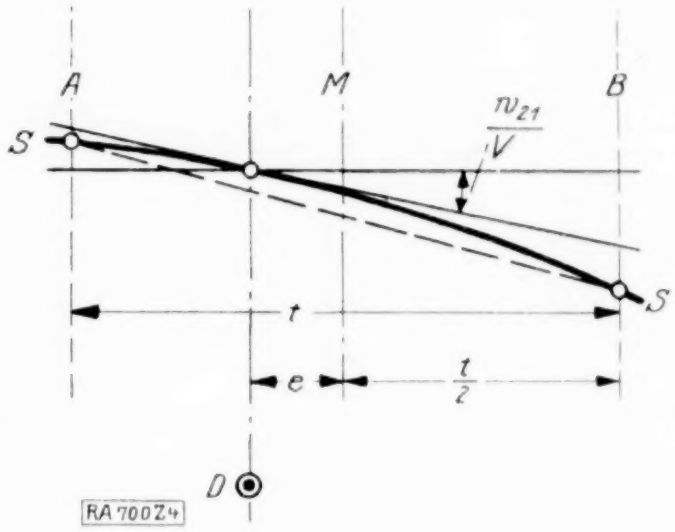


Abb. 4.

$$c_{a1} = 2\pi\left(\alpha_1 + \frac{t}{4R} - \frac{w_1}{V} - \frac{{}^1/_4 t + e}{R'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Die Rechnung soll im folgenden nur für den ungestaffelten Doppeldecker mit zwei gleichgroßen Flügeln durchgeführt werden, unter der weiteren Annahme, daß der Auftrieb auf Ober- und Unterflügel zu gleichen Teilen verteilt ist. Dann darf man annehmen, daß die Beziehung (9), die ja nur für Flügel 1 abgeleitet wurde, für beide Flügel genügend genau gilt. Führt man noch die Entfernung s des Druckmittelpunktes D von der Vorderkante ein, so wird $e = t/2 - s$. In diesem Sonderfall wird also

$$c_a = 2\pi\left(\alpha + \frac{t}{4R} - \frac{w}{V} - \frac{{}^3/_4 t - s}{R'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Für s kann man angenähert $\frac{c_m}{c_a} t$ schreiben, so daß das in der hier vorgetragenen Theorie neu hinzugekommene Glied in der Klammer auch $\frac{t}{R'}\left(\frac{3}{4} - \frac{c_m}{c_a}\right)$ geschrieben werden kann $\left(c_m = \text{Momentenzahl} = \frac{M}{{}^1/_2 \varrho V^2 F t}\right)$.

3. Berechnung der Stromlinienkrümmung. Es handelt sich nun noch darum, die Krümmung $1/R'$ zu bestimmen. Setzt man die von einem Flügel induzierte Geschwindigkeit gleich w, so ist die Neigung der resultierenden Stromlinie $\frac{w}{V}$. Behält man das in **1** benutzte Koordinatensystem bei, so wird die Krümmung

$$\frac{1}{R'} = \frac{\partial\left(\frac{w}{V}\right)}{\partial y} = \frac{1}{V}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Im folgenden soll die Krümmung nur in der Vertikalebene durch die tragende Linie berechnet werden, d. d. h. y bzw. η wird gleich 0. Man erhält dann aus (2)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = \frac{\Gamma_0}{4\pi l^2}\left[2\lambda^2\int_{-1}^{+1}\frac{1-\xi^2}{[\lambda^2+(\xi-\nu)^2]^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)[\lambda^2+(\xi-\nu)^2]}}\right.$$

$$\left. -\int_{-1}^{+1}\frac{(\xi-\nu)^2(1-\xi^2)}{[\lambda^2+(\xi-\nu)^2]^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)[\lambda^2+(\xi-\nu)^2]}}\right] \quad \ldots \quad (12).$$

Zur Integration, d. h. zur Zurückführung auf die in den Tafelwerken enthaltenen Legendreschen Normalintegrale wendet man in der üblichen Weise dieselben Substitutionen wie unter **1** an:

$$\xi = \frac{q+t}{1+qt}, \quad t^2 = \frac{x^2}{1+m-mx^2}$$

und erhält mit denselben Bezeichnungen wie bei **1** für das erste Integral

$$\frac{4\lambda^2(1-q^2)^{3/2}}{A^{5/2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{m}} \int_0^1 \left[1 - \left(1 + \frac{m-q^2}{1+m}\right) x^2 + \frac{m-q^2}{1+m} x^4\right] \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wobei

$$k^2 = \frac{m}{1+m}$$

ist. Setzt man allgemein

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\, dx = u_n,$$

so ist das erste Integral

$$\frac{4\lambda^2(1-q^2)^{3/2}}{A^{5/2}} \frac{k}{\sqrt{m}} \left[u_0 - \left(1 + \frac{m-q^2}{1+m}\right) u_2 + \frac{m-q^2}{1+m} u_4\right],$$

das zweite Integral

$$-\frac{2(1-q^2)^{3/2}(\nu-q)^2}{A^{5/2}} \frac{k}{\sqrt{m}} \left[u_0 - \left(1 - \frac{m}{q^2} \cdot \frac{m-q^2}{1+m}\right) u_2 - \frac{m}{q^2} \cdot \frac{m-q^2}{1+m} u_4\right].$$

Nach der bekannten Rekursionsformel für elliptische Integrale ist

$$(2n-1)k^2 u_{2n} - (2n-2)(1+k^2) u_{2n-2} + (2n-3) u_{2n-4} = 0,$$

woraus wir hier u_4 durch u_2 und u_0 ausdrücken können. Danach bekommen wir schließlich

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi l^2} \left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\lambda}\right)^{3/2} \left[\frac{\nu}{q} \operatorname{tg}^2\alpha\, \mathbf{E} - \frac{q\nu}{\operatorname{tg}^2\alpha} (\mathbf{K} - \mathbf{E})\right] \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

K und **E** bedeuten die vollständigen Legendreschen elliptischen Integrale 1. bzw. 2. Gattung. Die Werte für $\frac{2\pi l^2 V}{\Gamma_0} \cdot \frac{1}{R'}$ sind in Zahlentafel 2 und Abb. 5 wiedergegeben.

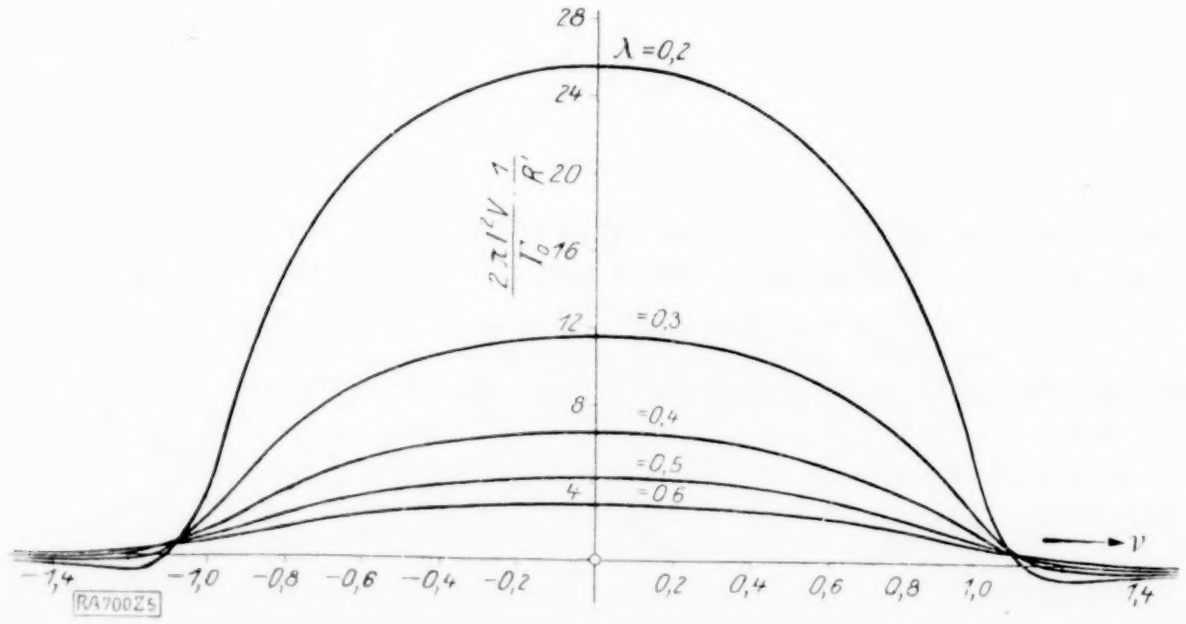


Abb. 5.

Die Ausdrücke für die Störungsgeschwindigkeit und die Stromlinienkrümmung ändern sich bei festgehaltenem λ, d h. gegebenem Abstand der beiden Flügel noch mit ν, von Punkt zu Punkt des oberen Flügels $1/R'$ nimmt nach den Flügelenden zu etwa auf 0 ab. Für manche Zwecke, wo es sich um die Ermittlung von Gesamtwirkungen handelt, wird es vorteilhafter sein, einen mittleren Wert der Störungsgeschwindigkeit und der

Zahlentafel 2.

$$\frac{2\pi l^2 V}{\Gamma_0} \cdot \frac{1}{R'}$$

ν	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$	$\lambda = 0{,}6$
0,0	25,515	11,614	6,577	4,217	2,912
0,1	25,445	11.514	6,543	4,197	2,863
0,2	25,113	11,360	6,421	4,120	2,832
0,3	24,500	11,054	6,267	3,970	2,728
0,4	23,569	10.501	5,991	3,775	2,582
0,5	22,324	9,984	5,572	3,510	2,390
0,6	20.442	9,048	5,021	3,204	2,139
0.7	18,080	7,894	4,290	2,699	1,833
0,8	14,660	6,288	3,421	2,158	1,492
0,9	10,316	4,255	2,370	1,574	1,118
1,0	3,278	2,074	1,416	1,003	0,774
1,1	0,025	0,374	0,603	0,531	0,476
1,2	— 0,748	— 0,154	0,139	0,212	0,260
1,3	— 0,716	— 0,365	— 0,102	0,036	0,101
1,4	— 0.569	— 0,351	— 0,180	— 0,065	0,011
1,5	— 0,441	— 0,312	— 0,196	— 0,109	— 0,041
1,6	— 0,341	— 0,265	— 0,185	— 0,116	— 0,064
1,7	— 0,266	— 0,221	— 0,170	— 0,121	— 0,078
1,8	— 0,202	— 0,178	— 0,141	— 0,111	— 0,081
1 9	— 0,165	— 0,142	— 0,127	— 0,103	— 0,075
2,0	— 0,141	— 0,125	— 0,109	— 0,089	— 0,074

Stromlinienkrümmung zu bestimmen. Diese ergeben sich für die angegebene Auftriebsverteilung zu

$$\left.\begin{aligned} w_{0m} &= \frac{\int_0^l \Gamma w_0 \, d\eta}{\int_0^l \Gamma \, d\eta} = \frac{\int_0^1 w_0 \sqrt{1-\nu^2}\, d\nu}{\int_0^1 \sqrt{1-\nu^2}\, d\nu} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 w_0 \sqrt{1-\nu^2}\, d\nu \\ \frac{1}{R_m'} &= \frac{\int_0^l \frac{\Gamma}{R'} d\eta}{\int_0^l \Gamma \, d\eta} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{R'} d\nu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14).$$

Für die Auswertung der Integrale kann man die Simpsonsche Regel verwenden. Das Intervall von 0 bis 1 teilt man in eine gerade Anzahl gleicher Teile von der Breite 0,1, wie es in den Tabellen für w_0 und $1/R'$ auch schon geschehen ist. Hat der Integrand hier die Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{10}$ so erhalten wir einen Näherungswert des Integrals zu

$$\frac{0{,}1}{3}[y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + \ldots 4\,y_9 + y_{10}].$$

Für die mittlere Krümmung läßt sich leicht eine Näherungsformel ableiten. Es zeigt sich nämlich, daß der Ausdruck $\lambda^2 \cdot \frac{\pi^2 l^2 V}{2\,\Gamma_0 R_m'}$ von λ nahezu unabhängig ist. Man erhält für

$\lambda =$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\lambda^2 \frac{\pi^2 l^2 V}{2\,\Gamma_0 R_m'} =$	0,680	0,683	0,682	0,678	0,665

so daß man für die praktisch üblichen Fälle $\frac{\pi^2 l^2 V}{2\,\Gamma_0 R_m'} = 0{,}68\,\frac{1}{\lambda^2}$ setzen kann. Setzt man $l = \frac{b}{2}$, wobei b also jetzt die Spannweite des Flügels bezeichnet, und nennt die senkrechte

Entfernung der beiden Flügel h, so wird $\lambda = 2\,\frac{h}{b}$. Schreibt man schließlich für Γ_0 noch $\frac{2\,c_a\,V\,t}{\pi}$, so hat man

$$\frac{1}{R_m'} = \frac{16}{\pi^3}\,\frac{c_a\,t}{b^2}\cdot 0{,}17\,\frac{b^2}{h^2} = 0{,}0875\,\frac{c_a\,t}{h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

4. Vergleich der Theorie mit der Beobachtung. Bei der Berechnung des zu einem bestimmten Auftrieb gehörigen Anstellwinkels eines Doppeldeckers auf Grund von Eindeckerversuchen hatte die Theorie der tragenden Linien zu einer Unstimmigkeit geführt. Wenn nämlich, mit dem Zeiger D für den Doppeldecker und dem Zeiger E für den Eindecker

$$c_{WD} = c_{WE} + \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{\varkappa\,F_D}{b_D^2} - \frac{F_E}{b_E^2}\right)^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ist, so war man genötigt, in der Umrechnungsformel für den Anstellwinkel statt $\varkappa$, das gleich dem Verhältnis des induzierten Widerstandes des Doppeldeckers zu dem des Eindeckers bei gleichem Gesamtauftrieb und gleicher Spannweite ist, einen empirischen Wert $\varkappa' (> \varkappa)$ einzuführen:

$$\alpha_D = \alpha_E + \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{\varkappa'\,F_D}{b_D^2} - \frac{F_E}{b_E^2}\right)^{2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Die Theorie der tragenden Linien lieferte im Widerspruch zu der Erfahrung $\varkappa' = \varkappa$. Es war zu vermuten, daß der in der vorliegenden Arbeit berechnete Krümmungseinfluß die Differenz zwischen $\varkappa'$ und $\varkappa$ erklären würde. Es war

$$c_a = 2\,\pi\left[\alpha + \frac{t}{4\,R} - \frac{w}{V} - \frac{t}{R'}\left(\frac{3}{4} - \frac{c_m}{c_a}\right)\right].$$

Nun war der Mittelwert von R' bestimmt durch

$$\frac{1}{R_m'} = 0{,}0875\,c_a\,\frac{t}{h^2}.$$

Folglich wird

$$c_a = 2\,\pi\left[\alpha + \frac{t}{4\,R} - \frac{w}{V} - 0{,}0875\,\frac{t^2}{h^2}\left(\frac{3}{4}\,c_a - c_m\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man die Umrechnung der Anstellwinkel nach Art von Formel (17) versuchen. Das Glied $\frac{t}{4\,R}$ ist dem Doppeldecker und dem Eindecker gemeinsam und hebt sich daher weg; für $\frac{w}{V} = \frac{w_{11} + w_{21}}{V}$ kann man $\frac{c_a}{\pi}\cdot\frac{\varkappa\,F_D}{b_D^2}$ schreiben[3]) und man erhält daher

$$\alpha_D = \alpha_E + \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{\varkappa\,F_D}{b_D^2} - \frac{F_E}{b_E^2}\right) + 0{,}0875\,\frac{t^2}{h^2}\left(\frac{3}{4}\,c_a - c_m\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Diese Formel kann wegen des Auftretens von c_m nicht auf die Form (17) gebracht werden, eine exakte Definition von $\varkappa'$ ist deshalb nicht möglich. $\varkappa'$ soll nun ähnlich wie bei den Experimenten in folgender Weise bestimmt werden. Die beiden ersten Glieder von (19) liefern den Winkel α_D' nach der alten theoretischen Formel. Rechnet man $\Delta\,\alpha = \alpha_D - \alpha_D'$ für zwei Werte von c_a, so werde

$$\varkappa' = \varkappa + \pi\,\frac{b_D^2}{F_D}\,\frac{\Delta\,\alpha_1 - \Delta\,\alpha_2}{c_{a1} - c_{a2}}$$

ermittelt und mit den experimentellen Werten verglichen.

Für fünf in Zahlentafel 45 der II. Lieferung der Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen angegebene Doppeldecker mit gleicher Spannweite des Ober- und Unterflügels ergeben sich die in der folgenden Zahlentafel 3 enthaltenen Werte. Die zum Vergleich herangezogene Eindeckermessung ergab durch Interpolation für $c_a = 0$ $c_m = 0{,}08$ und für $c_a = 0{,}6$ $c_m = 0{,}268$. Damit wurden die theoretischen Werte $\varkappa'$ berechnet.

---

[1]) Vergl. Tragflügeltheorie, II. Mitt. S. 8, Gl. (38).
[2]) Ergebnisse, II. Lief S. 37.
[3]) Ergebnisse II. Lief. S. 11 und 12.

Zahlentafel 3

Dd.-Nr.	h/t	b^2/F	$\Delta a_1 - \Delta a_2$	$\varkappa' - \varkappa$ theor.	$\varkappa$ theor.	$\varkappa'$ theor.	$\varkappa'$ exper.
1	0,8	3,0	0,0359	0,563	0,794	1,357	1,221
2	1,1	3,0	0,0190	0,298	0,754	1,042	1,049
3	1,4	3,0	0,01173	0,184	0,721	0,905	0,967
4	1,113	2,4	0,01857	0,234	0,722	0,956	0,949
5	1,113	1,44	0,01857	0,140	0,649	0,789	0,803

Die Uebereinstimmung zwischen den theoretischen und experimentellen Werten ist ziemlich befriedigend. Wenn man noch die Verteilung des Auftriebes nach der Tiefe beim induzierenden Flügel berücksichtigen würde, wie es in der vollständigen Dissertation von Bose geschehen ist, so würden die Werte $\varkappa' - \varkappa$ etwas kleiner, besonders stark aber der erste, da diese Korrektur bei kleinem $\frac{h}{t}$ den größten Einfluß hat. Der Anschluß an die Erfahrung wird hiernach noch besser. 700

Über die Strömungsvorgänge um Kreiszylinder.

Von **MASAMI ONO** in Tokio.

(Aus dem Aeronautischen Forschungsinstitut der Universität Tokio.)

Es ist eine wohlbekannte experimentelle Tatsache, daß die Widerstandsziffern einiger Körper, z. B. der Kugel und des Kreiszylinders, mit der sogenannten »Reynoldsschen Zahl« oder »reduzierten Geschwindigkeit« ihre Werte ändern [1]).

So fällt der Beiwert c_w der Kugel von ungefähr 0,49 bis 0,15 innerhalb eines Bereiches Reynoldsschen Zahlen von $3{,}0 \times 10^5$, und beim Zylinder von 1,2 bis 0,3 innerhalb eines Bereiches von $2{,}5 \sim 5{,}6 \times 1{,}0^5$ (im Mittel $3{,}0 \times 10^5$).

Dieses Phänomen, das seit der Entwicklung unserer experimentellen Aerodynamik von vielen Seiten untersucht wurde, ist bisher theoretisch sehr wenig geklärt. Prandtl teilt in einem bekannten Aufsatz [2]) mit, daß ein dünner Drahtring auf der Kugel oder ein Netz vor derselben den Strömungszustand in der Grenzschicht turbulent macht, und daß dadurch die Ablösungsstelle nach hinten rückt. Aber auch hier fehlt das genauere Bild dieses Vorganges.

1. Die Ablösungsstelle bei unter-kritischer Reynoldsscher Zahl. (Zweidimensionale Aufgabe.) Es sei U die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht deren Wert durch die bekannte Potentialströmung bestimmt ist. Innerhalb derselben herrsche die Geschwindigkeit u.

Ich nehme an, daß sich diese Geschwindigkeit durch folgende ganz rationale Funktion approximieren läßt [3]);

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3,$$

wo y der Abstand von der Oberfläche in der Grenzschicht bedeutet.

Die Koeffizienten $a_0 \ldots a_3$ sollen so bestimmt werden, daß sie die folgenden vier Grenzbedingungen erfüllen:

$$u = U \text{ bei } y = \delta, \quad = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ bei } y = \delta, \quad u = 0 \text{ bei } y = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\nu}\frac{\partial u^2}{\partial x} \text{ bei } y = 0 \quad (1),$$

wo δ die Dicke der Grenzschicht und x die Koordinate entlang der Oberfläche bezeichnet.

---

[1]) Widerstandsbeiwert $c_w = \frac{\text{Widerstand}}{q F}$ mit $q = \frac{\varrho}{2} V^2$ (Staudruck), ϱ = Dichte der Flüssigkeit, V = Geschwindigkeit, F = Hauptspantfläche. Reynoldssche Zahl $= \frac{VD}{\nu}$, wo D = Durchmesser, ν = Kinematische Zähigkeit. (Zähigkeitszahl = 0,01 cm²/sec für Wasser von 20° C.)

[2]) L. Prandtl, Der Widerstand von Kugeln. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, math.-phys. Klasse 1914, oder C. Wieselsberger, desgl. Z. F. M. 1914, S. 140.

[3]) K. Pohlhausen, Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. Abhandlung aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. I. Lieferung. Diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 252 bis 268.

Die letzte Bedingung folgt aus der allgemeinen Bewegungsgleichung der zähen Flüssigkeit

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

in der $\partial^2 u/\partial x^2$ gegen $\partial^2 u/\partial y^2$ vernachlässigt wurde.

Dann erhalten wir

$$a_0=0\,,\quad a_1=\frac{1}{\delta}\left(\frac{3\,U}{2}+\frac{\delta^2}{8}\frac{\partial u^2}{\partial x}\right),\quad a_2=-\frac{\delta^2}{4}\frac{\partial u^2}{\partial x}\,,\quad a_3=\frac{1}{8\,\nu\delta}\frac{\partial u^2}{\partial x}-\frac{U}{2\,\delta^3}\quad . \quad (3).$$

Die Ablösungsstelle ist durch die Beziehung gegeben

$$a_1=\frac{1}{\delta}\left(\frac{3\,U}{2}+\frac{\delta^2}{8}\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

in der die Grenzschichtdicke eintritt. Um die Ablösungsstelle zu bestimmen, lasse ich in (3) alle Glieder mit den Koeffizienten $\partial u^2/\partial x$ für die erste Annäherung weg und erhalte

$$u=\frac{U}{2}\left(\frac{3\,y}{\delta}-\frac{y^3}{\delta^3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Führt man diesen Ausdruck in die Kármánsche Integralbedingung ein[1]):

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u^2\,dy-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta U\,u\,dy+\frac{\delta}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_0^\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mit den aus (5) folgenden Werten

$$\int_0^\delta u^2\,dy=\frac{17}{35}\,U^2\,\delta\,,\quad \int_0^\delta u\,dy=\frac{5}{8}\,U\delta\,,\quad \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_0^\delta=-\frac{3}{2}\frac{U}{\delta}\,,\quad \frac{\delta}{\varrho}\frac{p}{x}=-\frac{\delta}{2}\frac{\partial U^2}{\partial x}\,,$$

so bekommt man eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d\delta^2}{dx}+\frac{358}{39}\frac{1}{U^2}\frac{dU^2}{dx}\delta^2=\frac{840}{39}\frac{\nu}{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Ihre Lösung ist

$$\delta=\sqrt{\frac{21.55\,\nu}{U^{19.36}}\int U^{18.36}\,dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mit $\delta=0$ bei $x=0$, wenn dieser Punkt bei der Strömung gegen einen Zylinder der Staupunkt ist.

Diese angenäherte Lösung (8), eingeführt in (3), liefert

$$a_1=\frac{1}{\delta}\left(\frac{3\,U}{2}+\frac{21.55}{8}\frac{\int U^{18.36}\,dx\,\partial U^2}{U^{19.36}\,\partial x}\right),$$

$$a_2=-\frac{21.55}{4}\frac{\int U^{18.36}\,dx}{U^{19.36}}\frac{\partial U^2}{\partial x}\,,$$

$$a_3=\frac{1}{\delta^3}\left(\frac{21.55}{8}\frac{\int U^{18.36}\,dx}{U^{19.36}}\frac{\partial U^2}{\partial x}-\frac{U}{2}\right).$$

Nach Prüfung der Größenordnung der einzelnen Glieder mit der für ideale Potentialströmung gültigen Beziehung

$$U=2\,U_0\sin\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wo U_0 die Geschwindigkeit ungestörter Strömung bedeutet, erhalten wir, für $\Theta=0$ bis $\pi/2$, wieder die in (5) gegebenen Werte der Koeffizienten. Daher ist, streng genommen, die Annäherung (5) und folglich auch (8) nur in diesem Bereich gültig, nicht aber am Ablösungspunkt.

Mit der Ablösungsbedingung (4) und obigem Wert von δ, ferner mit der Beziehung (9) und $dx=r_0\,d\Theta$, wo r_0 den Halbmesser der Kreiskontur bezeichnet, erhalten wir schließlich für die Lage der Ablösungsstelle die Winkelentfernung Θ_1 vom Staupunkt:

$$\Theta_1=-\,0{,}2785\,\frac{(\sin\Theta_1)^{19.36}}{\int(\sin\Theta_1)^{18.36}\,d\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Es ist hier zu bemerken, daß Θ_1 von U_0, r_0 und ν, also auch von der Reynoldsschen Zahl $U_0\,r_0/\nu$ unabhängig ist.

[1]) Th. v. Kármán, diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 235.

Den numerischen Wert von Θ_1 habe ich durch Integration mittels Simpsonscher Regel und dann mittels graphischer Lösung berechnet

$$\Theta_1 = 106^0$$

und zeigt ziemlich gute Uebereinstimmung mit den bisherigen Versuchsergebnissen über die Druckverteilung, welche ungefähr 90^0 zu geben scheinen.

Fernerhin bilde ich die Reynoldssche Zahl

$$R' = \frac{U\delta}{\nu},$$

welche mit Hilfe von (8) sich wie folgt ausdrücken läßt.

$$R' = \sqrt{\frac{21.55\, U_0\, 2 \int_0^{\Theta} (\sin\Theta)^{8.36}\, d\Theta}{\nu\, (\sin\Theta)^{17.36}}} = \sqrt{\frac{21.55\, R}{(\sin\Theta)^{17.36}} (\sin\Theta)^{18.36} d\Theta} \quad \ldots (11),$$

wo $R = \frac{U_0\, 2\, r_0}{\nu}$ ist. Bei kritischem Gebiete (R im Mittel $3{,}7 \times 10^5$)[1]), ist der Wert von R' am Ablösungspunkt $\Theta_1 = 106^0$, mit

$$\frac{\int (\sin\Theta)^{18.36}\, d\Theta}{(\sin\Theta)^{17.36}} \sim 1.01$$

$$R' = 2.84 \times 10^3.$$

Ein bemerkenswerter Schluß folgt sofort aus dem obigen Ergebnis, wenn wir dieses mit der kritischen Zahl vergleichen, bei der die laminare Strömung in einem Rohr in den turbulenten Zustand übergeht. Diese kritische Zahl ist

$$R = \frac{\bar{u}\, r}{\nu} = 660 \sim 1020,$$

wenn $\bar{u}$ die mittlere Geschwindigkeit über einem Querschnitt und r den inneren Radius des Rohres bedeutet. Bei der laminaren Strömung im Rohr ist die Geschwindigkeit in der Rohrachse (u_0) bekanntlich gleich $2\,u$, und die entsprechende kritische Reynoldssche Zahl

$$R = \frac{u_0\, r}{\nu} \sim 2.0 \times 10^3.$$

Wenn der Radius r als die Grenzschichtdicke der laminaren Strömung aufgefaßt wird, so können wir schließen, daß beide Vorgänge von einem gemeinsamen Gesetz von der Stabilität zäher Flüssigkeitsströmung beherrscht sind.

2. Die Ablösungstelle bei über-kritischen Reynoldsschen Zahlen. Es ist bekannt, daß beim Ueberschreiten einer gewissen Reynoldsschen Kennzahl die Strömung vom laminaren Zustand zum turbulenten übergeht und daß dieser Uebergang derjenigen Stelle entspricht, bei der der starke Abfall der Widerstandskoeffizienten eintritt.

Versuche[2]) über die Geschwindigkeitsverteilung im Rohre und in Grenzschichten der ebenen Wand zeigen, daß innerhalb des turbulenten Bereiches sehr nahe der Wand noch dünne Schichten bleiben, in denen die laminare Strömung herrscht.

Zijnen[2]) gibt in seiner These den Wert dieser »zweiten« Grenzschicht δ, als Durchschnittspunkt zweier Kurven

$$u = \frac{\tau}{\mu} y \quad \text{und} \quad u = U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7},$$

wo τ die Spannung an der Wand ist. Also ist der Wert von δ_1

$$\delta_1 = \left(\frac{\mu\, U}{\tau}\right)^{7/6} \delta^{-1/6}$$

---

[1]) Nach Göttinger Ergebnisse. (Prandtl, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. II. Lieferung. S. 26.) Das Uebergangsgebiet liegt zwischen $1{,}75 \times 10^5$ und $5{,}70 \times 10^5$, also im Mittel $3{,}7 \times 10^5$.

[2]) T. E Stanton, Friction. Dictionary of Applied Physics. Vol. 1, S. 370; B. G. van der Hegge Zijnen, Measurement of the Velocity Distribution in the Boundary Layer along a Plane Surface. Thesis Delft. 1924; K Suyehiro, A note on Resistance of Flow of Viscous Fluid. Journ. Soc. Naval Archt. Japan. Vol. 36, S. 87.

und die Geschwindigkeit in diesem Punkt ist

$$u_1 = \left(\frac{\mu}{\tau}\right)^{1/6} U^{7/6}\, \delta^{-1/6}$$

und mit dem von Kármán [1]) gegebenen Wert von

$$\tau = 0{,}0225\, \varrho\, U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}$$

ist die entsprechende Reynoldssche Zahl

$$\frac{u_1 \delta_1}{\nu} = 157 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Diese Beziehung (12) ist nach Zijnenschen Versuchen ziemlich gut erfüllt.

Aus den Versuchen Zijnens kann ich noch eine Beziehung zwischen u_1 und U gewinnen wie die folgende Zahlentafel zeigt:

U m/s	u_1 m/s	u_1/U	U m/s	u_1 m/s	u_1/U	U m/s	u_1 m/s	u_1/U
32	14	0,4	20	8,5	0,4	8	4	0,5
28	12	0,4	16	7	0,4	6	3	0,5
24	9	0,4	12	5	0,4	4	1,7	0,4

Unter der Voraussetzung, daß diese Beziehungen auch in unserem Falle, also im Falle einer gekrümmten Wand, noch richtig bleiben, bestimme ich die Koeffizienten des folgenden Ausdrucks für die Geschwindigkeitsverteilung

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

mit den Grenzbedingungen

$$u = 0 \text{ bei } y = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\nu}\frac{\partial U^2}{\partial x} \text{ bei } y = 0, \qquad u = \frac{U}{2.5} \text{ bei } y = \delta_1 \quad (13),$$

daraus

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \frac{1}{\delta_1}\left(\frac{U}{2.5} + \frac{\delta_1^2}{4\nu}\frac{\partial U^2}{\partial x}\right), \qquad a = -\frac{1}{4\nu}\frac{\partial U^2}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Die Ablösungsstelle ist wieder aus der Beziehung

$$\frac{U}{2.5} + \frac{\delta_1^2}{4\nu}\frac{\partial U^2}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

mit $U = 2\, U_0 \sin \Theta$ und $\delta_1 = 157\, \nu/0.4\, U$.

(15) geht in diesem Falle über in

$$\frac{1 - \cos^2 \Theta_1}{\cos \Theta_1} = -\frac{1.93 \times 10^5}{R},$$

wo $R = 2\, U_0\, r_0/\nu$.

Im Gegensatz zu dem in vorhergehenden Abschnitt behandelten Falle ist die Ablösungsstelle Θ_1 nun von der Reynoldsschen Zahl abhängig, und zwar rückt sie mit wachsender Kennzahl mehr nach hinten. Wieweit dieses Ergebnis richtig ist, kann man leider noch nicht feststellen, da die Versuche weit über das kritische Gebiet noch nicht ausgeführt sind.

Mit $R = 3{,}0 \times 10^5$ erhalte ich

$$\cos^2 \Theta_1 - 0.642 \cos \Theta_1 - 1 = 0, \qquad \cos \Theta_1 = -0.729, \qquad \Theta_1 = 137^0.$$

Dieser Wert ist in guter Uebereinstimmung mit den Versuchen [2]) von G. I. Taylor, bei welchen der Druck zwischen $\Theta = 126^0 \sim 144^0$ konstant wird.

Tokio, Juni 1925. 664

[1]) Th. v. Kármán, Diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 242.

[2]) G. I. Taylor, Pressure Distribution around a Cylinder. R. & M. No. 191, 1916. R bei diesem Versuche war rd. $1{,}7 \times 10^5$. Mit diesem Werte, $\cos \Theta_1 = -0{,}65$ oder $\Theta_1 = 131^0$.

Zylinder in einer unstetigen Potentialströmung.

Von **WILHELM MÜLLER** in Hannover.

1. Einleitung. Die wirkliche Strömung um einen Zylinder oder einen Flügel unterscheidet sich bekanntlich von der idealen, eindeutigen Potentialströmung durch die an der Hinterseite des umströmten Körpers sich ausbildende Wirbelschleppe. Diese Wirbelschleppe ist aber gleichbedeutend mit einer Diskontinuitätsschicht, deren Spur in der Ebene eine Diskontinuitätslinie resp. einen Diskontinuitätsstreifen ergibt. Man kann nun ein mehrdeutiges Potential angeben, das in dem Gebiet der einblättrigen Riemannschen Ebene, das zugleich als Strömungsgebiet zu betrachten ist, eine dem wirklichen Verlauf jener Schichtlinie möglichst angepaßte Unstetigkeit aufweist. Ein solches Potential wird, wie C. Witoszynski in einer interessanten, im Rahmen der Delfter Tagung 1924 vorgetragenen Arbeit[1]) gezeigt hat, nicht nur einen Ersatz für die Zirkulation, sondern auch die Möglichkeit einer angenäherten Erfassung des Widerstandes bieten, der aus dem Lanchester-Kuttaschen Ansatz bekanntlich nicht ermittelt werden kann.

In der vorliegenden Arbeit soll der Witoszynskische Ansatz für ein Joukowskysches Profil durchgeführt werden. Die Resultate dürften deshalb von Interesse sein, weil sie eine der Größenordnung nach nicht ungünstige Uebereinstimmung mit den aus den Göttinger Versuchen gewonnenen Werten des Profilwiderstandes ergeben.

2. Ansatz für die Strömung um den Kreiszylinder. Fügt man der aus dem Unendlichen mit der Geschwindigkeit u parallel der negativen ξ-Achse kommenden Strömung um den Kreiszylinder $|\zeta| = R$, deren komplexes Potential

$$W_1(\zeta) = -u\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right)$$

lautet, den Ausdruck

$$W_2(\zeta) = i\,k\,u\,R\,\frac{\zeta^{\frac{1}{2}} - R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\zeta^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}}$$

hinzu, so bleibt für das entstehende Strömungsbild

$$W(\zeta) = W_1(\zeta) + W_2(\zeta)$$

der Kreis Stromlinie, da W_2 reell ausfällt für die Punkte seines Umfanges. Indem wir ferner verlangen, daß die Geschwindigkeit

$$\frac{dW}{d\zeta} = \bar{v} = -u\left(1 - \frac{R^2}{\zeta^2}\right) + \frac{ik\,R^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} u}{\zeta^{\frac{1}{2}}\left(\zeta^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)^2}$$

für den Punkt $R\,e^{i(\alpha \pm \pi)}$ verschwindet, erhalten wir für die zunächst noch unbestimmte Konstante k den Wert $k = -4 \sin\alpha$. Das gibt dann das Potential

$$W(\zeta) = -u\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right) - 4\,i\,u\,R \sin\alpha\,\frac{\zeta^{\frac{1}{2}} - R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\zeta^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}} \quad \ldots\ldots (1),$$

$$\bar{v} = \frac{dW}{d\zeta} = -u\left(1 - \frac{R^2}{\zeta^2}\right) - \frac{4\,i\,u\,R^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} \sin\alpha}{\zeta^{\frac{1}{2}}\left(\zeta^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)^2} \quad \ldots\ldots (2).$$

Die Geschwindigkeitsfunktion besitzt einen doppelten Pol in $\zeta = 0$ und außerdem den Pol

$$\zeta = R\,e^{i(\pm 2\pi + \alpha)},$$

der im zweiten Riemannschen Blatt liegt, wenn man übereinkommt, die Argumente für die Punkte des Kreises innerhalb der Grenzen $-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$ zu wählen.

Die Geschwindigkeitsverteilung längs des Umfanges

$$v_k = 2\,u\left(\sin\varphi + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos{}^1\!/_2\,(\varphi - \alpha)}\right) \quad \ldots\ldots (3)$$

[1]) C. Witoszynski, Modification du principe de circulation, Proceedings of the first international congress for applied mechanics, ed. by C. B. Biezeno and J. M. Burgers, Delft 1925, S. 418; ferner von demselben Verfasser, La mécanique des profils d'aviation, Paris 1924, S. 43.

geht aus der folgenden Zahlentafel hervor, in der die Geschwindigkeiten für den Fall $\alpha = 30^0$ in Vielfachen der Anströmgeschwindigkeit u in Abhängigkeit von der Amplitude φ der Kreispunkte eingetragen sind.

φ	$\frac{v_k}{u}$	φ	$\frac{v_k}{u}$
0	0,25	150	1,66
30	1,5	180	0,78
60	2,24	− 60	1,15
90	2,53	− 90	1,34
135	2,04	− 150	0

Das Maximum von v_k liegt ungefähr bei $\varphi = 90^0$, ist aber größer als das Maximum $2\,u$ für die gewöhnliche Parallelströmung $W_1(\zeta)$. Wenn man den Ausdruck

$$i\psi = -u\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\varphi - 4\,u\,R\sin\alpha\,\frac{r-R}{r + R + 2\,(R\,r)^{1/2}\cos\dfrac{\varphi-\alpha}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

für die in Polarkoordinaten r, φ ausgedrückte Stromfunktion $= 0$ setzt, ergibt sich die Kreislinie $R = r$ und das System der Diskontinuitätslinien

$$\frac{r+R}{r}\sin\varphi + \frac{4\,R\sin\alpha}{R + r + 2\,(r\,R)^{1/2}\cos\dfrac{\varphi-\alpha}{2}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Setzt man in (5) $r = R$, um die Schnittpunkte mit dem Kreis zu bestimmen, so kommt

$$\sin\varphi\left(1 + \cos\frac{\varphi-\alpha}{2}\right) + \sin\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

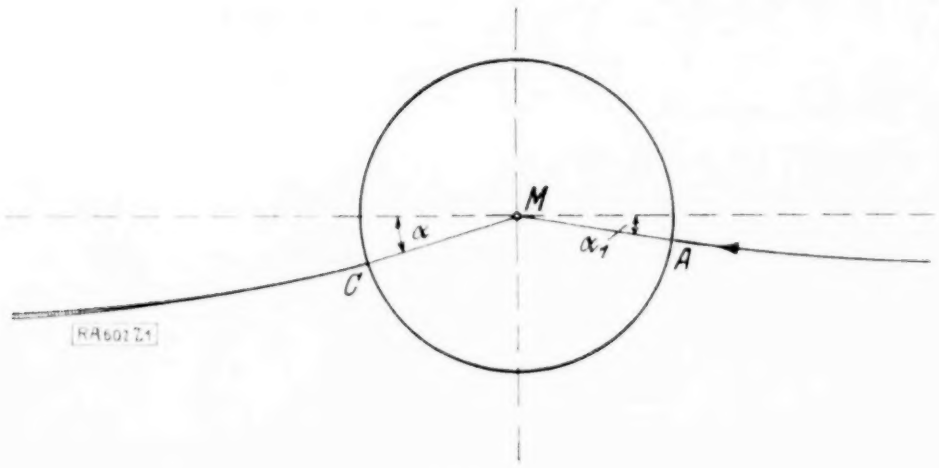


Abb. 1.

Diese Gleichung wird erfüllt durch $\varphi = \alpha \pm \pi$ und durch einen Wert $\varphi_1 = -\alpha$, der zwischen 0 und $-\alpha$, etwa bei $-\frac{\alpha}{2}$ liegt.

Im Punkte C mit $\varphi = \alpha \pm \pi$ teilt sich die Stromlinie $\psi = 0$ in zwei Zweige, und es ergibt sich, daß der hier beginnende Diskontinuitätsstreifen für den Radiusvektor $r = (7 + \sqrt{44})\,R = 13{,}63\,R$ die größte, auf dem zugehörigen Kreise gemessene Breite besitzt, daß ferner für $r = \infty$, $\varphi = 0$ wird, also die Diskontinuitätslinien mehr und mehr der reellen Achse, d. h. der Stromrichtung sich annähern (vgl. Abb. 1).

3. Berechnung der Kräfte beim Flügelprofil. Wenn nun dieses spitz vom Zylinder abgehende Unstetigkeitsgebiet den wirklichen Strömungsverhältnissen bei der Kreiskontur wenig entspricht, so wird die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung auffallend günstiger, wenn wir das oben eingeführte Potential durch Vermittlung einer konformen Abbildung

$$z = F(\zeta)$$

so auf das Aeußere eines Flügelprofils in der z Ebene übertragen, daß der Verzweigungspunkt oder der hintere Staupunkt auf dem Kreis in die Profilspitze übergeht. Die auf den Flügel pro Längeneinheit ausgeübten Kräfte berechnen sich wieder aus der Blasiusschen Formel

$$i\,\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{A} - i\,\mathfrak{W} = -\frac{1}{2}\varrho\int\left(\frac{d\,W}{d\,\zeta}\right)^2\frac{d\,\zeta}{d\,z}\,d\,\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wo ϱ die Masse der Flüssigkeit pro Volumeneinheit bedeutet. Das Integral ist zu erstrecken längs des Kreises K, wobei der Spaltungspunkt C als Ausgangspunkt zu nehmen ist. Wir erhalten dann mit (3a)

$$\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{W} = -\frac{\varrho}{2}\,u^2 \int_{\cdot}^{\cdot} \left[1 - \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{4\,i\,R^{\frac{3}{2}}\,e^{\frac{i\alpha}{2}}\sin\alpha}{\zeta^{\frac{1}{2}}\left(\zeta^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)}\right]^2 \frac{d\zeta}{dz}\,d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Mit der Substitution $\zeta = \zeta'^2\,R\,e^{i\alpha}$ verwandelt sich das Integral in

$$\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{W} = -\varrho\,u^2\,R\,e^{i\alpha} \int_{-i}^{+i} \left[1 - \frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta'^4} + \frac{4\,i\,e^{-i\alpha}\sin\alpha}{\zeta'(\zeta'+1)^2}\right]^2 \frac{d\zeta}{dz}\,\zeta'\,d\zeta' \qquad (8\,a).$$

Das Integral ist dann zu erstrecken längs des Halbkreises $A\,B\,C$ von $-i$ bis $+i$ (vergl. Abb. 2). Statt des Integrationsweges $A\,B\,C$ kann man auch $A\,D\,E\,F\,C$ wählen, weil das dazwischen liegende Bereich keine Pole enthält. Bei einer unendlichen Ausdehnung des Halbkreises $D\,E\,F$ sieht man, daß die entsprechenden Anteile des Integrals sich aufheben und daß es genügt, das Integral nur längs $A\,D$ und $F\,C$ zu nehmen. Setzt man also für den Weg $A\,D$, $\zeta' = -i\,\eta'$ und für $F\,C$, $\zeta' = i\,\eta'$ und führt schließlich statt η' die reelle Variable t ein, so kommt

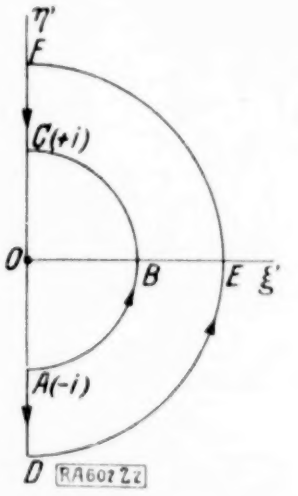


Abb. 2.

$$\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{W} = 16\,\varrho\,u^2\,R\,\sin\alpha \int_1^{\infty} \left[\frac{(t^2-1)^2}{t^4\,(t^2+1)} - \frac{2\,i\,e^{-i\alpha}\sin\alpha\,(t^2-1)\,(3\,t^2+1)}{t^4\,(t^2+1)^4}\right] \frac{d\zeta}{dz}\,dt \qquad (9).$$

Wir wollen nun der Betrachtung, ohne übrigens damit die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken, ein Joukowskysches Profil zu grunde legen, das aus dem Kreise durch die Substitution

$$z = \zeta + \frac{p^2\,e^{2i\beta}}{\zeta + \zeta_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

hervorgeht [1]). Damit die Profilspitze C' dem Kreispunkt $C: \zeta = -R\,e^{i\alpha}$ entspricht, müssen wir

$$\zeta_0 = R\,e^{i\alpha} - p\,e^{i\beta}$$

setzen. Der Winkel β zwischen der in die negative ζ-Achse fallenden Zustromrichtung und der zweiten oder Längsachse des Profils kann wieder als natürlicher Anstellwinkel gelten, während der Winkel $\alpha - \beta = \varphi$ zwischen den beiden ersten Profilachsen die Wölbung oder Gesamtkrümmung des Profils charakterisiert (vgl. Abb. 3). Wenn wir in $\frac{d\zeta}{dz}$ wieder $\zeta = -R\,t^2\,e^{i\alpha}$ einführen, ferner die im allgemeinen (bei den der Praxis angepaßten Formen) kleine Größe

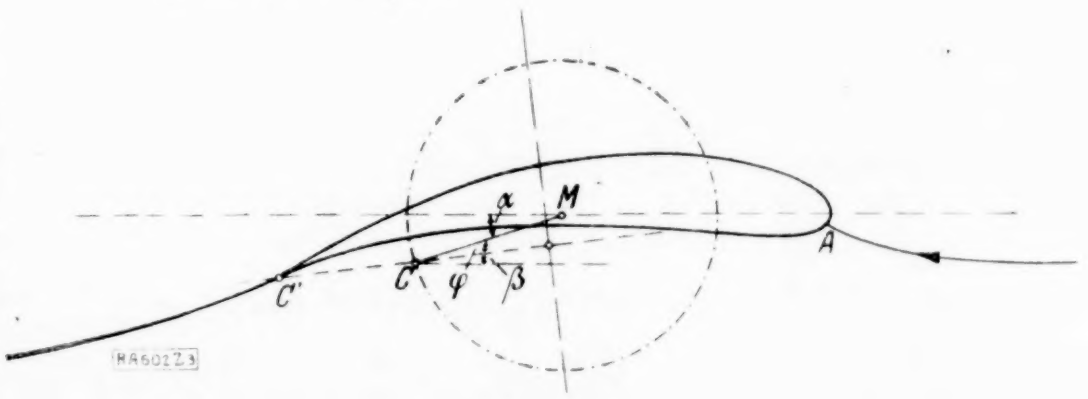


Abb. 3.

$$\frac{\zeta_0}{R}\,e^{-i\alpha} = 1 - \frac{p}{R}\,e^{-i\varphi} = \varepsilon$$

setzen, so formt sich das Integral um in

$$\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{W} = 16\,\varrho\,u^2\,R\,\sin\alpha \int_1^{\infty} \left(\frac{(t^2-1)^2}{t^4\,(t^2+1)} - \frac{2\,i\,e^{-i\alpha}\sin\alpha\,(t^2-1)^2\,(3\,t^2+1)}{t^4\,(t^2+1)^4}\right) \frac{(t^2-\varepsilon)^2\,dt}{(t^2-1)\,(t^2-2\,\varepsilon+1)} \qquad (11).$$

Wenn wir auf die Kleinheit von ε Rücksicht nehmen, so können wir in erster Annäherung setzen

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{t^4}{t^4-1} - \frac{2\,\varepsilon\,t^2}{(t^4-1)\,(t^2+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

---

[1]) Vgl. Wilh. Müller, Zur Konstruktion von Tragflächenprofilen, diese Zeitschrift Bd. 4, 1924, S. 419.

Durch einfache Partialbruchzerlegung und Anwendung der Rekursionsformel

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ergibt sich weiter

$$\int_1^\infty \frac{(t^2-1)\,dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,; \qquad 2\int_1^\infty \frac{(t^2-1)\,dt}{t^2(t^2+1)^3} = \frac{9}{8}\pi - \frac{7}{2} = 0{,}032$$

$$\int_1^\infty \frac{(t^2-1)(3t^2+1)}{(t^2+1)^5}\,dt = \frac{1}{4} - \frac{9}{128}\pi = 0{,}03\,, \qquad 2\int_1^\infty \frac{(t^2-1)(3t^2+1)}{t^2(t^2+1)^6}\,dt = \frac{147}{128}\pi - \frac{18}{5} = 0{,}006$$

und daher

$$\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{W} = 16\,\varrho\,u^2 R \sin\alpha \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{9}{8}\pi - \frac{7}{2}\right)\varepsilon - i\,e^{-i\alpha}\sin\alpha\left[\frac{1}{2} - \frac{9}{64}\pi - \left(\frac{147}{128}\pi - \frac{18}{5}\right)\varepsilon\right]\right\} \quad (14).$$

Wenn man auch auf die Kleinheit des Winkels $\alpha = \varphi + \beta$ Rücksicht nimmt, so kommt für die Komponenten

$$\mathfrak{A} = 8\,\varrho\,u^2 R \sin\alpha = 8\,\varrho\,u^2 R \sin(\varphi+\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{W} &= 8\,\varrho\,u^2 R \sin\alpha \left\{ 0{,}064\,\frac{p}{R}\sin\varphi + \left[0{,}12 - 0{,}024\left(1 - \frac{p}{R}\cos\varphi\right)\sin\alpha\cos\alpha\right]\right\} \\ &= 8\,\varrho\,u^2 R \sin(\varphi+\beta)\left\{0{,}064\,\frac{p}{R}\sin\varphi + 0{,}096\sin(\varphi+\beta) + 0{,}012\,\frac{p}{R}\cos\varphi\sin 2(\varphi+\beta)\right\}\end{aligned}\right\} \quad (16).$$

Die Beiwerte für den Auftrieb und Widerstand lauten daher bei der Tiefe T

$$c_a = 16\,\frac{R}{T}\sin(\varphi+\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$c_w = 16\,\frac{R}{T}\sin(\varphi+\beta)\left[0{,}064\,\frac{p}{R}\sin\varphi + 0{,}096\sin(\varphi+\beta) + 0{,}012\,\frac{p}{R}\sin 2(\varphi+\beta)\right] \quad (18).$$

Eliminiert man $\varphi + \beta = \alpha$, so ergibt sich die Beziehung

$$c_w = 0{,}064\,\frac{p}{R}\sin\varphi\,c_a + \frac{T}{R}\left(0{,}006 + 0{,}0015\,\frac{p}{R}\right)c_a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Aus diesen Ausdrücken läßt sich zunächst eine qualitative Gesetzmäßigkeit von den Formelelementen (Invarianten) des Profils ablesen, wie sie durch die Versuche bestätigt wird. Man sieht z. B., was vom Auftrieb bereits aus der älteren Theorie bekannt ist, daß beide Komponenten in dem praktischen Bereiche der Anstellwinkel β mit der Wölbung φ des Profils wachsen. Setzt man ferner $p = \frac{T}{4}$ und $R = \frac{T}{4\cos\varphi} + \delta$, wo δ ein Maß für die Dicke des Profils bezeichnet, so zeigt die Formel (18), daß z. B. der Widerstand von dicken Profilen im allgemeinen größer ausfällt als von dünnen. Um zu zeigen, daß die Koeffizienten für den Auftrieb den Göttinger Versuchsresultaten mindestens ebenso nahe kommen, wie die der älteren Theorie entnommenen Werte, daß ferner die Beiwerte für den Widerstand von der Größenordnung des Profilwiderstandes sind, legen wir das in Göttingen durchmessene Profil 430[1]) zugrunde, für das etwa folgende Abmessungen zutreffen

$$R = 3{,}25, \quad T = 11{,}8, \quad p = 2{,}93, \quad \frac{p}{R} = 0{,}9, \quad \varphi = 7^0.$$

Um den Vergleich durchführen zu können, haben wir zu den Göttinger Anstellwinkeln β' noch den Winkel zwischen der unteren Profilsehne und der natürlichen Längs- oder 2. Achse hinzuzufügen, der etwa die Größe 2^0 hat. Dann ergibt sich folgende Zahlentafel (siehe S. 17) für die mit 100 multiplizierten Beiwerte C_a und C_w nach der Theorie und den Versuchen.

Man sieht, daß die Auftriebswerte durchgängig zu groß, die Widerstandswerte zu klein ausfallen, wie zu erwarten war. Was den Widerstandswert angeht, so müßten die theoretischen Werte noch auf das in Göttingen benutzte Seitenverhältnis $\lambda = 1/5$ reduziert, ferner noch um einen Betrag vermehrt werden, der mit der Hautreibung zusammenhängt und etwa die Größenordnung 1,3 bis 1,4 hat. Zum Zwecke der Reduktion auf das Seiten-

[1]) Vgl. Ergebnisse der Aerod. Versuchsanstalt Göttingen, I. Lief., München-Berlin 1923, S. 88, 99, 110.

β'	β	C_a ($\lambda = 0$)	C_w ($\lambda = 0$)	C_a (Versuch)	C_w (Versuch)
$-6{,}1^0$	$-4{,}1^0$	22	0,28	14	1,32
$-4{,}6^0$	$-2{,}6^0$	34	0,55	24,3	1,52
$-3{,}1^0$	$-1{,}1^0$	45	0,87	35,6	1,94
$-1{,}7^0$	$0{,}3^0$	56	1,22	45,5	2,39
$-0{,}2^0$	$1{,}8^0$	67	1,68	56,0	3,14
$1{,}3^0$	$3{,}3^0$	77	2,19	66,0	4,00
$2{,}7^0$	$4{,}7^0$	90	2,82	76,8	5,04
$4{,}2^0$	$6{,}2^0$	100	3,41	87,0	6,33
$5{,}6^0$	$7{,}6^0$	111	4,07	96,9	7,44
$8{,}6^0$	$10{,}6^0$	133	5,07	113,9	10,4
$11{,}5^0$	$13{,}5^0$	154	7,43	128,0	13,6
$14{,}5^0$	$16{,}5^0$	176	9,54	137,0	17.2

verhältnis wendet Witoszynski ein Verfahren an, das hier nur in seinen Grundgedanken besprochen werden und in einer besonderen Veröffentlichung des Verfassers nachgeprüft werden soll.

In bezug auf die Kraftwirkung kann die eben betrachtete unstetige Strömung ersetzt werden durch eine Kutta-Strömung, der man noch einen hinter dem Profil in einem bestimmten Abstand befindlichen Stabwirbel von einer der Zirkulation entgegengesetzten und absolut gleichen Stärke superponiert. Damit die Grenzbedingungen in der ζ-Ebene der Kreiszylinderströmung nicht verletzt werden, muß der innere, die Zirkulation bedingende Wirbelkern das Spiegelbild des äußeren in bezug auf den Kreis sein. Im Falle des unendlich langen Zylinders wird die Achse beider Stabwirbel ins Unendliche gehen. Beim endlichen Zylinder resp. beim Flügel werden sich die beiden Wirbel zu einem Ring zusammenschließen, für dessen Kernlinie angenähert die Gestalt eines Rechtecks angenommen werden kann. Für die Berechnung der Korrektur des Widerstandes wird es dann vor allem auf die Bestimmung der mittleren, durch den äußeren Teil des Wirbelringes auf die innere Wirbelachse übertragene Abwärtsgeschwindigkeit ankommen. Es ergibt sich schließlich, daß man die Widerstandswerte für den unendlich langen Flügel mit einem zwischen 1 und 2 gelegenen Koeffizienten multiplizieren muß, um die für die endlichen Flügel zutreffenden Werte zu erhalten. Man sieht schon aus diesen Angaben, daß die schließlichen Resultate verhältnismäßig wenig von der Wirklichkeit abweichen. 602

Die atmosphärischen Störungsgleichungen.

Von **V. BJERKNES** in Oslo (Norwegen).

1. Die Störungsgleichungen dynamischer Systeme. Die allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen dynamischer Systeme ist gewöhnlich überwältigend schwierig. Dennoch hat man aber Methoden, die Probleme von den Bewegungen der Systeme anzugreifen. Man untersucht bevorzugte Zustände: Gleichgewichtszustände und Bewegungszustände einfacher Art, wie permanente oder stationäre Bewegungen. Kennt man diese, so kann man einen Schritt weiter gehen: man bildet Gleichungen für kleine Störungen dieser Zustände, für Störungen des Gleichgewichtes oder der bevorzugten Bewegungszustände. Diese Störungsgleichungen kann man durch geeignete Voraussetzungen auf lineare Form bringen, wodurch sie der Integration mehr zugänglich werden als die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Systems.

In den durchgearbeiteten elementaren Fällen geben die Störungsgleichungen Bewegungen von zwei Arten, die analytisch nahe verwandt sind, aber gegensätzlich dynamischen Eigentümlichkeiten des Systems entsprechen. In dem einen Falle treten Sinusschwingungen auf: das Gleichgewicht oder die bevorzugte Bewegung war dann stabil. Im anderen Falle tritt ein exponentieller Abfall von dem Ausgangszustand ein. Dieser war dann ein Zustand instabilen Gleichgewichtes oder instabiler Bewegung.

Ist das System ein materielles Kontinuum, so kommen gewöhnlich Wellen an Stelle der Schwingungen. Gleichzeitig wird der früher so schroffe Gegensatz zwischen dem Falle der Stabilität und Instabilität weniger ausgesprochen. Selbst im Instabilitätsfalle

behält die Bewegung ihren Wellencharakter, aber die Instabilitätswellen haben einen anderen Fortpflanzungsmechanismus, und zeichnen sich durch exponentiell anwachsende Amplituden aus.

Für das Angreifen der Probleme von den atmosphärischen Bewegungen nach diesem Muster liegt alles zurecht. Wir kennen die Bewegungsgleichungen des Systems, die hydrodynamischen Gleichungen; wir kennen den Gleichgewichtszustand, charakterisiert durch die barometrische Höhenformel; wir kennen bevorzugte, stationäre Bewegungszustände, wie die »Gradientwinde«, die durch Gleichgewicht zwischen Druckgradient[1]) und ablenkender Kraft der Erdrotation gegeben sind. Endlich gelingt die Ableitung der entsprechenden Störungsgleichungen ohne Schwierigkeit nach dem klassischen Muster.

Dennoch hat man aber bis jetzt keine größere Anstrengungen gemacht, auf diesem an sich so rationellen Wege vorzudringen. Die Ursache ist offenbar, daß man nicht erwartet hat, einen Zusammenhang zu finden zwischen den atmosphärischen Störungen im meteorologischen Sinne dieses Wortes, und den mathematischen Lösungen der atmosphärischen Störungsgleichungen. Was man auf diesem Wege bisher gefunden hat, geht nicht wesentlich über die Helmholtzsche Erklärung der Wogenwolken und anderer Erscheinungen der Kleinmeteorologie hinaus.

Ganz anders steht aber die Sache heute. Es ist jetzt gelungen, die Zyklonenbildung synoptisch durchzuanalysieren. Die Zyklone entsteht aus einem stationären Bewegungszustand, gekennzeichnet durch zwei an einander grenzende Gradientströme verschiedener Temperatur. Und die Natur führt uns bei jeder Zyklonbildung in elegantester Weise die Integration der entsprechenden Störungsgleichungen vor. Diejenigen Meteorologen, — sie sind wohl immer noch in kleiner Minderheit — die ihre Prognosen nur auf Grundlage vollständig durchanalysierter Karten machen, sind mit diesen Tatsachen wohl vertraut.

Die von der Natur uns vorgeführte Integration mathematisch nachzumachen, ist jetzt eine der wichtigsten Aufgaben der theoretischen Meteorologie. Es ist ein Gebiet, wo jetzt die Meteorologen die Mathematiker zu einer fruchtbaren Mitarbeit einladen können.

Ich werde im Folgenden das allgemeine Prinzip angeben, wie man solche atmosphärische Störungsgleichungen ableitet, und daran einige allgemeine Bemerkungen knüpfen.

2. Bezeichnungen. Eine wesentliche Schwierigkeit ist die Wahl zweckmäßiger Bezeichnungen.

Die unabhängigen Variabeln machen zunächst keine Schwierigkeit, sie bleiben immer die Koordinaten und die Zeit, x, y, z, t.

Die abhängigen Variabeln sind die drei Geschwindigkeitskomponenten, Druck, und entweder Dichte oder spezifisches Volumen. Für diese Größen sind drei parallele Reihen von Buchstaben notwendig, eine erste für die allgemeine Bewegung, eine zweite für die bevorzugte Bewegung, und eine dritte für die Bewegung, die die Störung darstellt. Ich habe für die erste Reihe kleine gothische Buchstaben in Anwendung gebracht, für die zweite die großen lateinischen, und für die dritte die kleinen lateinischen, entsprechend dem folgenden Schema.

Abhängige Variable	Allgemeine Bewegung	Bevorzugte Bewegung	Störungsbewegung
Geschwindigkeitskomponenten	$\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$	U, V, W	u, v, w
Druck	$\mathfrak{p}$	P	p
Dichte	$\mathfrak{q}$	Q	q
Spezifisches Volumen	$\mathfrak{s}$	S	s
Funktionszeichen zur Darstellung der Grenzflächen	$\mathfrak{f}$	F	f

Die Atmosphäre soll jetzt aus einer Anzahl Schichten bestehen. Die Grenzflächen dieser Schichten bezeichnen wir, von oben gerechnet

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots n,\ \ldots r+1 \quad . \quad . \quad .

entsprechenden römischen Zahlen bezeichnet, so daß jede Schicht durch dieselbe Zahl wie ihre obere Grenzfläche bezeichnet wird

$$\text{I, II, } \ldots M, N, \ldots R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}.$$

M und N sind also zwei beliebige Schichten, getrennt durch die Grenzfläche n; R ist die unterste Schicht.

Größen, die nicht mit einer Schicht, sondern mit einer Grenzfläche zu tun haben, werden genügend spezifiziert durch Hinzufügen eines Index der Reihe (a). Dies ist besonders der Fall mit den Funktionszeichen $\mathfrak{f}$, F, f, die zur Darstellung der Grenzflächen dienen. So ist

$$\mathfrak{f}_n(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

die Gleichung der Grenzfläche n in der allgemeinen Bewegung, und

$$F_n(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(d)}$$

die Gleichung derselben physikalischen Grenzfläche, wenn die bevorzugte Bewegung vorliegt.

Die Größen, die sich auf eine Schicht beziehen, werden mit dem hoch angebrachten Schichtindex (b) versehen. So werden zum Beispiel die Störungsgrößen der Schichten M und N beziehungsweise

$$u^M,\ v^M,\ w^M,\ p^M,\ q^M,\ s^M, \qquad u^N,\ v^N,\ w^N,\ p^N,\ q^N,\ s^N \quad . \quad . \quad \text{(e)}$$

und die speziellen Werte dieser Größen an der Trennungsfläche n:

$$u_n^M,\ v_n^M,\ w_n^M,\ p_n^M,\ q_n^M,\ s_n^M, \qquad u_n^N,\ v_n^N,\ w_n^N,\ p_n^N,\ q_n^N,\ s_n^N \quad . \quad . \quad \text{(f)}.$$

Wie schon angegeben, werden wir im folgenden solche allgemeine, nicht im voraus spezifizierte Bewegungen betrachten, die als die Summe einer bevorzugten Bewegung und einer Störungsbewegung dargestellt werden können. Also sollen für alle Indizes die folgenden Relationen gelten:

$$\mathfrak{u} = U + u,\ \mathfrak{v} = V + v,\ \mathfrak{w} = W + w,\ \mathfrak{p} = P + p,\ \mathfrak{q} = Q + q,\ \mathfrak{s} = S + s,\ \mathfrak{f} = F + f \quad \text{(g)}.$$

Zum Verständnis der letzten Relation zwischen den Funktionszeichen $\mathfrak{f}$, F, f sei bemerkt, daß man die Gleichung

$$f_n(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(h)}$$

als Ausdruck der Störung auffassen kann, durch welche die Fläche (d) in die Fläche (c) übergeführt wird.

3. Die Gleichungen der nicht spezifizierten Bewegung. Wir denken uns das rechtwinklige Koordinatensystem ganz beliebig gelegen. Die Schwerebeschleunigung hat dann die Komponenten g_x, g_y, g_z längs den Achsen, und die Winkelgeschwindigkeit der Erde die Komponenten $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$. Zur Darstellung der Massenfelder wird das spezifische Volumen statt der Dichte benutzt. Das hat im folgenden gewisse rechnerische Vorteile. Die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen lassen sich dann schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + \mathfrak{u}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \mathfrak{v}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} - 2\,\Omega_z\right) + \mathfrak{w}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} + 2\,\Omega_y\right) &= -\,\mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} - g_x \\
\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \mathfrak{u}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} + 2\,\Omega_z\right) + \mathfrak{v}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \mathfrak{w}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} - 2\,\Omega_x\right) &= -\,\mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y} - g_y \\
\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + \mathfrak{u}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} - 2\,\Omega_y\right) + \mathfrak{v}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + 2\,\Omega_x\right) + \mathfrak{w}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} &= -\,\mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial z} - g_z
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(a)},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} + \mathfrak{u}\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x} + \mathfrak{v}\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y} + \mathfrak{w}\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial z} - \mathfrak{s}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)},$$

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\mathfrak{p}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}.$$

Die Bewegungsgleichungen (a) sind in etwas ungewöhnlicher Form geschrieben, insofern als die Ω enthaltenden Erdrotationsglieder auf die linke Seite gebracht sind. Das gibt den nachfolgenden Rechnungen eine nützliche Symmetrie. Bringt man sie auf die rechte Seite zurück, so wird hier die »ablenkende Kraft der Erdrotation« in gewöhnlicher Form auftreten. Mit Rücksicht auf die folgenden Rechnungen ist ebenfalls die Kontinuitätsgleichung (b) in entwickelter Form geschrieben.

Die Gleichung (c), die die Barotropie der flüssigen Schicht sichert, kann von Schicht zu Schicht verschieden sein, wodurch das Gesamtsystem baroklin [1]) wird. Für das Gesamt-

[1]) Zu dieser Terminologie vergleiche meine Abhandlung: Circular Vortex . . ., Geofysiske Publikationer, Kristiania 1921, oder auch Appell: Traité Mécanique Rationelle, Tome III, Troisième Edition, Chapitre XXXVII: Fluides Baroclines, Paris 1921.

system sind deshalb die inneren und äußeren Grenzflächen von wesentlicher Bedeutung. Die äußere Grenzfläche ist durch die Gleichung

$$\mathfrak{f}_1(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{d})$$

gegeben. Für die Geschwindigkeit der unmittelbar anliegenden Flüssigkeitspartikelchen gilt dann zunächst die kinematische Grenzflächenbedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial t} + \mathfrak{u}^{\mathrm{I}} \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial x} + \mathfrak{v}^{\mathrm{I}} \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial y} + \mathfrak{w}^{\mathrm{I}} \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{e}).$$

Ist diese Grenzfläche eine freie Oberfläche, so nehmen wir an, daß an ihr der Druck konstant sei. Der Druckgradient muß dann längs der Normale der Fläche fallen, welches sich durch die folgenden drei Gleichungen ausdrückt:

$$\frac{\partial \mathfrak{p}^{\mathrm{I}}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{p}^{\mathrm{I}}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{p}^{\mathrm{I}}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{p}^{\mathrm{I}}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{p}^{\mathrm{I}}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{p}^{\mathrm{I}}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial x} = 0 \quad (\mathbf{f}).$$

Wir betrachten darauf die innere Grenzfläche Nummer n, gelegen zwischen den Schichten M und N. Ihre Gleichung sei

$$\mathfrak{f}_n(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{g}).$$

Hier gilt dann eine Gleichung der Form (e) für die Partikelchen sowohl der Schicht M wie der Schicht N, die an der Grenzfläche anliegen:

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial t} + \mathfrak{u}_n^M \frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial x} + \mathfrak{v}_n^M \frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial y} + \mathfrak{w}_n^M \frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial t} + \mathfrak{u}_n^N \frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial x} + \mathfrak{v}_n^N \frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial y} + \mathfrak{w}_n^N \frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial z} = 0 \quad . \quad (\mathbf{h}).$$

Ferner darf an der Grenzfläche keine Druckdifferenz auftreten. Analog (f) drückt sich diese Bedingung durch die folgenden Gleichungen aus:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathfrak{p}^M}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{p}^N}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial z} - \left(\frac{\partial \mathfrak{p}^M}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{p}^N}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{p}^M}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{p}^N}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathfrak{p}^M}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{p}^N}{\partial x}\right)\frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial z} = 0, \\ &\left(\frac{\partial \mathfrak{p}^M}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{p}^N}{\partial x}\right)\frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathfrak{p}^M}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{p}^N}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathfrak{f}_n}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathbf{i}).$$

Zu den Bezeichnungen sei hier bemerkt: nach vollführter Differentiation sollen in den Ausdrücken $\frac{\partial \mathfrak{p}^M}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{p}^N}{\partial y}$, ... die speziellen Werte der Koordinaten x, y, z substituiert werden, die nach (g) der Grenzfläche n angehören, so daß eine vollständigere aber doch nicht notwendige Bezeichnung $\left(\frac{\partial \mathfrak{p}^M}{\partial y}\right)_n$, $\left(\frac{\partial \mathfrak{p}^N}{\partial y}\right)_n$, ... sein würde.

Ganz unten, als Untergrenze der untersten Schicht R haben wir die unbewegliche Fläche

$$\mathfrak{f}_{r+1}(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{j}),$$

wo die kinematische Grenzflächenbedingung die Form

$$\mathfrak{u}^R \frac{\partial \mathfrak{f}_{r+1}}{\partial x} + \mathfrak{v}^R \frac{\partial \mathfrak{f}_{r+1}}{\partial y} + \mathfrak{w}^R \frac{\partial \mathfrak{f}_{r+1}}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{k})$$

annimmt, während der Druck keinen besonderen Bedingungen unterworfen sei.

4. Die Gleichungen der bevorzugten Bewegung. Wenn wir nicht speziell angeben, wodurch sich die bevorzugte Bewegung besonders auszeichnen soll, gilt genau dasselbe Gleichungssystem für diese Bewegung, wie für die nicht spezifizierte Bewegung. Also, indem wir überall die großen lateinischen Buchstaben statt der früheren kleinen gotischen schreiben, ergeben sich die eigentlichen Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\left(\frac{\partial U}{\partial y} - 2\Omega_z\right) + W\left(\frac{\partial U}{\partial z} + 2\Omega_y\right) = -S\frac{\partial P}{\partial x} - g_x, \\ &\frac{\partial V}{\partial t} + U\left(\frac{\partial V}{\partial x} + 2\Omega_z\right) + V\frac{\partial V}{\partial y} + W\left(\frac{\partial V}{\partial z} - 2\Omega_x\right) = -S\frac{\partial P}{\partial y} - g_y, \\ &\frac{\partial W}{\partial t} + U\left(\frac{\partial W}{\partial x} - 2\Omega_y\right) + V\left(\frac{\partial W}{\partial y} + 2\Omega_x\right) + W\frac{\partial W}{\partial z} = -S\frac{\partial P}{\partial z} - g_x \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\mathrm{a}),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U\frac{\partial S}{\partial x} + V\frac{\partial S}{\partial y} + W\frac{\partial S}{\partial z} - S\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{b}),$$

$$S = S(P) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{c}).$$

Dann die Gleichungen für die freie Oberfläche:

$$F_1(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{d}),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + U^I \frac{\partial F_1}{\partial x} + V^I \frac{\partial F_1}{\partial y} + W^I \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(e)},$$

$$\frac{\partial P^I}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial P^I}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial P^I}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial P^I}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial P^I}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial P^I}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0 \quad \text{(f)}.$$

Weiter die Gleichungen für eine beliebige innere Grenzfläche:

$$F_n(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(g)},$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + U_N^M \frac{\partial F_n}{\partial x} + V_N^M \frac{\partial F_n}{\partial y} + W_N^M \frac{\partial F_n}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F_n}{\partial t} + U_n^N \frac{\partial F_n}{\partial x} + V_n^N \frac{\partial F_n}{\partial y} + W_n^N \frac{\partial F_n}{\partial z} = 0 \quad \text{(h)},$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial P^M}{\partial y} - \frac{\partial P^N}{\partial y}\right)\frac{\partial F_n}{\partial z} - \left(\frac{\partial P^M}{\partial z} - \frac{\partial P^N}{\partial z}\right)\frac{\partial F_n}{\partial y} &= 0, \\ \left(\frac{\partial P^M}{\partial z} - \frac{\partial P^N}{\partial z}\right)\frac{\partial F_n}{\partial x} - \left(\frac{\partial P^M}{\partial x} - \frac{\partial P^N}{\partial x}\right)\frac{\partial F_n}{\partial z} &= 0, \\ \left(\frac{\partial P^M}{\partial x} - \frac{\partial P^N}{\partial x}\right)\frac{\partial F_n}{\partial y} - \left(\frac{\partial P^M}{\partial y} - \frac{\partial P^N}{\partial y}\right)\frac{\partial F_n}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}.$$

Für die Bezeichnungen gilt dieselbe Bemerkung, die zu den entsprechenden Gleichungen 3 (i) gemacht wurde. Endlich wird man an der unteren unbeweglichen Grenzfläche

$$F_{r+1}(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(j)}$$

$$U^R \frac{\partial F_{r+1}}{\partial x} + V^R \frac{\partial F_{r+1}}{\partial y} + W^R \frac{\partial F_{r+1}}{\partial z} = 0$$

haben.

5. Die allgemeinen Störungsgleichungen. Ich betrachte jetzt eine Bewegung, zusammengesetzt nach dem Schema 2 (g) aus der bevorzugten Bewegung und einer Störungsbewegung. Die Ausdrücke 2 (g) werden dann in die Gleichungen des Abschnittes 3 eingesetzt, und

1. dadurch vereinfacht, daß die bevorzugte Bewegung den Gleichungen des Abschnittes 4 genügt,

2. dadurch, daß alle Produkte der Größen u, v, w, s, p in den räumlichen Ableitungen derselben Größen außer Betracht gesetzt werden, und ebenfalls die Produkte dieser Größen in den räumlichen Ableitungen der Funktion f.

Für die Funktion $\mathfrak{s}$ der endlichen Gl. (3 c) verwenden wir die Taylorsche Entwicklung $\mathfrak{s} = S + \frac{d\mathfrak{S}}{d\mathfrak{P}} p$, wo wir offenbar $\frac{d\mathfrak{S}}{d\mathfrak{P}}$ durch $\frac{dS}{dP}$ oder $S'(P)$ ersetzen können, so daß $s = S'(P)\, p$.

Es ergibt sich dann das folgende Schema der Hauptgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + V\frac{\partial u}{\partial y} + W\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial U}{\partial x} + v\left(\frac{\partial U}{\partial y} - 2\,\Omega_z\right) + w\left(\frac{\partial U}{\partial z} + 2\,\Omega_y\right) &= -S\frac{\partial p}{\partial x} - s\frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} + V\frac{\partial v}{\partial y} + W\frac{\partial w}{\partial z} + u\left(\frac{\partial V}{\partial x} + 2\,\Omega_z\right) + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\left(\frac{\partial V}{\partial z} - 2\,\Omega_x\right) &= -S\frac{\partial p}{\partial y} - s\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x} + V\frac{\partial w}{\partial y} + W\frac{\partial w}{\partial z} + u\left(\frac{\partial W}{\partial x} - 2\,\Omega_y\right) + v\left(\frac{\partial W}{\partial y} + 2\,\Omega_x\right) + w\frac{\partial W}{\partial z} &= -S\frac{\partial p}{\partial z} - s\frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + U\frac{\partial s}{\partial x} + V\frac{\partial s}{\partial y} + W\frac{\partial s}{\partial z} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} - S\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - s\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{(b)}.$$

$$s = S'(P)\, p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}.$$

Dazu kommen als Gleichungen für die gestörte freie Oberfläche

$$F_1(x, y, z, t) + f_1(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(d)},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + U_1^I\frac{\partial f_1}{\partial x} + V_1^I\frac{\partial f_1}{\partial y} + W_1^I\frac{\partial f_1}{\partial z} + u_1^I\frac{\partial F_1}{\partial x} + v_1^I\frac{\partial F_1}{\partial y} + w_1^I\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad \text{(e)},$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial z} &= 0\\
\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial x} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(f)}.$$

Weiter die Gleichungen für eine gestörte innere Grenzfläche der Nummer n

$$F_n(x, y, z, t) + f_n(x, y, z, t) = 0 \quad \ldots \quad \text{(g)},$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f_n}{\partial t} + U_n^M\frac{\partial f_n}{\partial x} + V_n^M\frac{\partial f_n}{\partial y} + W_n^M\frac{\partial f_n}{\partial z} + u_n^M\frac{\partial F_n}{\partial x} + v_n^M\frac{\partial F_n}{\partial y} + w_n^M\frac{\partial F_n}{\partial z} &= 0\\
\frac{\partial f_n}{\partial t} + U_n^N\frac{\partial f_n}{\partial x} + V_n^N\frac{\partial f_n}{\partial y} + W_n^N\frac{\partial f_n}{\partial z} + u_n^N\frac{\partial F_n}{\partial x} + v_n^N\frac{\partial F_n}{\partial y} + w_n^N\frac{\partial F_n}{\partial z} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{(h)},$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial p^M}{\partial y} - \frac{\partial p^N}{\partial y}\right)\frac{\partial f_n}{\partial z} - \left(\frac{\partial p^M}{\partial z} - \frac{\partial p^N}{\partial z}\right)\frac{\partial f_n}{\partial y} + \left(\frac{\partial p^M}{\partial y} - \frac{\partial p^N}{\partial y}\right)\frac{\partial F_n}{\partial z} - \left(\frac{\partial p^M}{\partial z} - \frac{\partial p^N}{\partial z}\right)\frac{\partial F_n}{\partial y} &= 0\\
\left(\frac{\partial p^M}{\partial z} - \frac{\partial p^N}{\partial z}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x} - \left(\frac{\partial p^M}{\partial x} - \frac{\partial p^N}{\partial x}\right)\frac{\partial f_n}{\partial z} + \left(\frac{\partial p^M}{\partial z} - \frac{\partial p^N}{\partial z}\right)\frac{\partial F_n}{\partial x} - \left(\frac{\partial p^M}{\partial x} - \frac{\partial p^N}{\partial x}\right)\frac{\partial F_n}{\partial z} &= 0\\
\left(\frac{\partial p^M}{\partial x} - \frac{\partial p^N}{\partial x}\right)\frac{\partial f_n}{\partial y} - \left(\frac{\partial p^M}{\partial y} - \frac{\partial p^N}{\partial y}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x} + \left(\frac{\partial p^M}{\partial x} - \frac{\partial p^N}{\partial x}\right)\frac{\partial F_n}{\partial y} - \left(\frac{\partial p^M}{\partial y} - \frac{\partial p^N}{\partial y}\right)\frac{\partial F_n}{\partial x} &= 0
\end{aligned}\right\} \text{(i)}.$$

Endlich hat man an der unteren unveränderten und unbeweglichen Grenzfläche $r+1$

$$F_{r+1}(x, y, z) = 0 \quad \ldots \quad \text{(j)},$$

$$u^R\frac{\partial F_{r+1}}{\partial x} + v^R\frac{\partial F_{r+1}}{\partial y} + w^R\frac{\partial F_{r+1}}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad \text{(k)}.$$

Zu den obigen Gleichungen (f) und (i) ist noch Folgendes zu bemerken: eigentlich sollten hier in den Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial y}, \ldots$ die Koordinatenwerte substituiert werden, die der resultierenden gestörten Grenzfläche angehören. Wir ergänzen aber die Annahme (1) und (2) durch eine dritte: daß es genügende Annäherung gibt, wenn man die Koordinatenwerte der entsprechenden ungestörten Fläche der bevorzugten Bewegung einführt.

Nach diesem Schema kann man nun die Störungsgleichungen für jede beliebige bevorzugte atmosphärische Situation aufschreiben, vorausgesetzt, daß man die Atmosphäre in barotrope Schichten I, II, III, ... aufteilen kann, die durch sonst beliebig geformte Grenzflächen von einander getrennt sind.

Will man weiter verallgemeinern, so kann man jede Schicht baroklin annehmen, indem man in sämtliche Gl. (c) die Temperatur als unabhängige Variable neben dem Druck einführt, und die nötigen ergänzenden Gleichungen oder Voraussetzungen thermodynamischen Ursprungs einführt. Die Integrationsaufgaben werden sich aber dabei sehr erheblich erschweren. Es bleibt bis auf Weiteres eine wesentliche Vereinfachung, das Barokline nur durch die Grenzflächenbedingungen einzubringen.

6. Bevorzugte Bewegung spezieller Natur; Zwei an einander grenzende geradlinige Gradientwinde. Die vorhergehenden allgemeinen Gleichungen werden wir als Beispiel auf den denkbar einfachsten Fall anwenden: Den in Frage kommenden Teil der Erde wollen wir eben annehmen, und das Koordinatensystem mit der z-Achse vertikal legen, so daß $g_x = g_y = 0$ und $g_z = g$. Wir nehmen nur zwei atmosphärische Schichten an, I und II, und die bevorzugte Bewegung soll aus den zwei längs der x-Achse gerichteten unveränderlichen Gradientströmen I und II bestehen. Die Variablen der bevorzugten Bewegung sind dann die Folgenden:

$$\begin{aligned}
&U^{\mathrm{I}} = U^{\mathrm{I}}(y, z), \quad V^{\mathrm{I}} = 0, \quad W^{\mathrm{I}} = 0, \quad P^{\mathrm{I}} = P^{\mathrm{I}}(y, z), \quad S^{\mathrm{I}} = S^{\mathrm{I}}(y, z),\\
&U^{\mathrm{II}} = U^{\mathrm{II}}(y, z), \quad V^{\mathrm{II}} = 0, \quad W^{\mathrm{II}} = 0, \quad P^{\mathrm{II}} = P^{\mathrm{II}}(y, z), \quad S^{\mathrm{II}} = S^{\mathrm{II}}(y, z).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen 4, (a), (b), (c) reduzieren sich dann auf

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial y} &= -2\Omega_z\frac{U^{\mathrm{I}}}{S^{\mathrm{I}}}, & \frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial y} &= -2\Omega_z\frac{U^{\mathrm{II}}}{S^{\mathrm{II}}}\\
\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial z} &= -\frac{g}{S^{\mathrm{I}}} + 2\Omega_y\frac{U^{\mathrm{I}}}{S^{\mathrm{I}}}, & \frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial z} &= -\frac{g}{S^{\mathrm{II}}} + 2\Omega_y\frac{U^{\mathrm{II}}}{S^{\mathrm{II}}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(a)},$$

$$0 = 0, \qquad 0 = 0 \quad . \quad . \quad .

$$\frac{\partial s}{\partial t} + U\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial x} + w\frac{\partial S}{\partial z} - S\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{b}),$$

$$s = S'(P)\cdot p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{c}).$$

Dann werden die Gleichungen für die gestörte freie Oberfläche 5 (d), (e), (f)

$$F_1(x, y) + f_1(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{d}),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + U_1^{\mathrm{I}}\frac{\partial f_1}{\partial x} + v_1^{\mathrm{I}}\frac{\partial F_1}{\partial y} + w_1^{\mathrm{I}}\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{e}),$$

$$\left.\begin{aligned} -2\,\Omega_z\frac{U_1^{\mathrm{I}}}{S_1^{\mathrm{I}}}\frac{\partial f_1}{\partial z} - \left(-\frac{g}{S_1^{\mathrm{I}}} + 2\,\Omega_y\frac{U_1^{\mathrm{I}}}{S_1^{\mathrm{I}}}\right)\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0 \\ \left(-\frac{g}{S^{\mathrm{I}}} + 2\Omega_y\frac{U_1^{\mathrm{I}}}{S_1^{\mathrm{I}}}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0, \quad 2\,\Omega_z\frac{U_1^{\mathrm{I}}}{S_1^{\mathrm{I}}}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\mathbf{f})$$

Weiter werden die Gleichungen für die gestörte innere Grenzfläche

$$F_2(x, y) + f_2(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{g}),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + U_2^{\mathrm{I}}\frac{\partial f_2}{\partial x} + v_2^{\mathrm{I}}\frac{\partial F_2}{\partial y} + w_2^{\mathrm{I}}\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t} + U_2^{\mathrm{II}}\frac{\partial f_2}{\partial x} + v_2^{\mathrm{II}}\frac{\partial F_2}{\partial y} + w_2^{\mathrm{II}}\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \quad (\mathbf{h}),$$

$$\left.\begin{aligned} -2\,\Omega_z\left(\frac{U^{\mathrm{I}}}{S^{\mathrm{I}}} - \frac{U^{\mathrm{II}}}{S^{\mathrm{II}}}\right)\frac{\partial f_2}{\partial z} - \left[-g\left(\frac{1}{S^{\mathrm{I}}} - \frac{1}{S^{\mathrm{II}}}\right) + 2\,\Omega_y\left(\frac{U^{\mathrm{I}}}{S^{\mathrm{I}}} - \frac{U^{\mathrm{II}}}{S^{\mathrm{II}}}\right)\right]\frac{\partial f_2}{\partial y} & \\ + \left(\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial y} - \frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial y}\right)\frac{\partial F_2}{\partial z} - \left(\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial z} - \frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial z}\right)\frac{\partial F_2}{\partial y} &= 0, \\ \left[-g\left(\frac{1}{S^{I}} - \frac{1}{S^{\mathrm{II}}}\right) + 2\,\Omega_y\left(\frac{U^{I}}{S^{\mathrm{I}}} - \frac{U^{\mathrm{II}}}{S^{\mathrm{II}}}\right)\right]\frac{\partial f_2}{\partial x} - \left(\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x} - \frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial x}\right)\frac{\partial F_2}{\partial y} &= 0, \\ 2\,\Omega_z\left(\frac{U^{\mathrm{I}}}{S^{\mathrm{I}}} - \frac{U^{\mathrm{II}}}{S^{\mathrm{II}}}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x} - \frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial x}\right)\frac{\partial F_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\mathbf{i}).$$

Am horizontalen Boden endlich, wo

$$z = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{j}),$$

führt die Gleichung 5 (k) zum Verschwinden der vertikalen Geschwindigkeitskomponente

$$w_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{k}).$$

Nach diesen Gleichungen müssen nun die Störungen an der Grenzfläche unserer beiden Gradientströme einsetzen, von den kleinsten Kräuselungen, die die Bildung der Wogenwolken aufklären, zu den großzügigen Störungen, die in die Zyklonenbildung hineinführen. Mit der Integration dieser Gleichungen, sowie der allgemeineren wo man krummlinige Gradientströme zugrunde legt, wird der Fortschritt der theoretischen dynamischen Meteorologie innig verbunden sein.

8. Die wichtigsten Vereinfachungen des Problems. Auf die völlig allgemeine Lösung der im vorigen Abschnitte gestellten Integrationsaufgabe, mit den dazugehörenden Grenzflächenbedingungen, wird man vielleicht noch lange warten müssen. Man muß mit den einfacheren, leichter angreifbaren Spezialfällen anfangen. Die wichtigsten Voraussetzungen, die — vereinzelt oder miteinander verbunden — zu wesentlichen Vereinfachungen führen, sind die Folgenden.

1. Man setzt den Einfluß der Erddrehung außer Betracht. Alle Glieder, die Ω enthalten, verschwinden dann aus den Gleichungen. Eine wichtige Folge davon ist, daß alle Grenzflächen der bevorzugten Bewegung in horizontale Ebenen übergehen, die die horizontale Erdoberfläche nicht schneiden.

2. Man setzt die Horizontalbewegung der Schichten außer Betracht: $U^I = U^{\mathrm{II}} = 0$. Also der bevorzugte Zustand ist ein Zustand des Gleichgewichtes. Auch dann werden die ungestörten Grenzflächen horizontale Ebenen, selbst wenn Erddrehung mitgenommen wird.

3. Man nimmt an, daß man in den Bewegungsgleichungen die vertikale Beschleunigung und die Vertikalgeschwindigkeit neben den entsprechenden horizontalen vernachlässigen kann. Man kommt dann zu dem Falle, daß die Wellen lang im Vergleich zur Dicke der Schichten sind. Dies ist besonders wichtig, weil man dabei alle Erscheinungen der Kleinmeteorologie, wie die Bildung der Wogenwolken, wegschneidet, und sich auf das Hauptproblem der in die Zyklonenbildung hineinführenden Störungen beschränkt. Wenn

man in der Vereinfachung dieser Art möglichst weit geht, kommt man zu dem quasi-statischen Zustand, wo für jede einzelne Vertikale die Gleichgewichtsgleichung, also die Barometerformel, gültig ist.

4. Man setzt die Kompressibilität außer Betracht, so daß man mit einem konstanten spezifischen Volumen innerhalb jeder Schicht rechnen kann, und nur eine plötzliche Aenderung dieser Größe an der Schichtgrenze zuläßt.

Im Falle 1 kommt man auf die klassische Theorie der Wellen an äußeren und inneren Grenzflächen, die, meistens unter Hinzuziehung einer oder mehrerer der Bedingungen 2, 3, 4, vielfach bearbeitet worden ist. Man begegnet Wellen der zwei bekannten Typen: die stabilen Wellen, die sich unter Erhaltung ihrer Höhe fortpflanzen, und die Instabilitätswellen, die unter exponentiellem Anwachsen der Amplituden konvektiv von den Strömen mitgeführt werden. Ein für das Zyklonenproblem unzweifelhaft wichtiges Resultat ist das Folgende: Wenn man die Kompressibilität beibehält, und Wellen betrachtet, die im Vergleich zur Dicke der Schichten lang sind, so kommt man, bei Schichtdicken und Temperatursprüngen, wie sie bei Zyklonen vorkommen, auf Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die denen der Zyklonen gut entsprechen, vergleiche Tabelle I S. 28 der oben zitierten Abhandlung »Circular Vortex«.

Der Fall 2 ist auch integrierbar, jedenfalls in Verbindung mit 3 und gibt eine erste Vorstellung, wie sich das Eingreifen der Erddrehung in den Mechanismus der Wellen gestaltet. Solange die Periode kurz ist im Vergleich zur Periode der Trägheitskreisbewegung, verhält sich die Welle ganz wie eine gewöhnliche Welle, und die einzelnen Partikelchen laufen in Ellipsen herum, die in der Vertikalebene enthalten sind. Je mehr die Periode zunimmt, um so mehr legen sich aber die elliptischen Bahnebenen schief. Sobald dann die Periode der Wellen mit der Periode des Umlaufes in der Trägheitsbahn zusammenfällt, wird der Orbitalumlauf horizontal und kreisförmig. Die Welle wird gleichzeitig unendlich lang, indem jeder Phasenunterschied wegfällt: Die ganze Bewegung löst sich in einen gleichphasigen Trägheitsumlauf sämtlicher Partikelchen auf. Jedes Partikelchen bewegt sich wie ein freier Punkt unter der Einwirkung einer einzigen Kraft, der ablenkenden Kraft der Erddrehung. Der Druck greift nicht in die Bewegung ein. Eine solche Bewegung, wo der Druck überhaupt nicht regulierend eingreift, ist selbstverständlich in unserer Atmosphäre nicht realisierbar. Dennoch ist aber die Lösung wichtig als ein erläuterndes Beispiel zur Charakterisierung der Erdrotationswirkungen, und Elemente dieser eigentümlichen einfachen Lösung wird man selbstverständlich in allen allgemeineren Lösungen wiederfinden, wo die Erddrehung mitwirkt.

Die ernstlichen Schwierigkeiten fangen erst an, wenn man keine der vereinfachenden Voraussetzungen 1. und 2. macht. Aber erst dann findet man die schiefe Diskontinuitätsfläche, die die Erdoberfläche schneidet, also die Verhältnisse, unter denen man auf den synoptischen Karten die Zyklonenbildung beobachtet. In diesem Falle empfiehlt es sich, bei den einleitenden Integrationsversuchen möglichste Vereinfachungen durch die Voraussetzungen 3. und 4. zu erzielen.

9. Charakter der allgemeinen Lösung. Wenn man auch die allgemeine Lösung mathematisch noch nicht besitzt, so kann man sich doch ein Bild davon machen. Die entsprechenden qualitativen Ueberlegungen, mit Ausgangspunkt in den bekannten Lösungen und in experimentell und empirisch feststehenden Tatsachen über Wellenbewegung, habe ich zweimal durchgeführt[1]). Gewisse Hauptergebnisse dieser »Wellentheorie der Zyklonenbildung« sind die folgenden:

1. sie führt zu dem qualitativ richtigen Stromlinienbild mit dem dazugehörigen Druckbilde für die jungen, noch nicht zusammengeklappten Zyklonen;

2. sie erklärt, warum die Partikelchen nördlich der Diskontinuität zyklonisch umlaufen müssen, eine Eigentümlichkeit, die umso überraschender ist, als es ein Umlauf entgegen dem im freien Trägheitskreise ist, aber deshalb auch um so beweiskräftiger, weil Shaw und Lempfert eben diesen Umlauf nördlich der Bahn des Druckminimums gefunden haben[2]);

[1]) Vergl. die zitierte Abhandlung Circular Vortex, p. 20—31 und 70—79 und weiter: V. Bjerknes: Le Problème des Cyclones, Journal de Physique, Paris, November 1925. Dieser Wellentheorie der Zyklonenbildung entsprechende Modelle einer Zyklone befinden sich im Geophysikalischen Institut der Universität Leipzig und im Institut für Strömungsforschung zu Göttingen.

[2]) Shaw and Lempfert, Life History of Surface Air Currents, London 1906.

3. sie erklärt, warum die Fortpflanzungsrichtung die einseitige ist, die im allgemeinen gegen Osten führt.

Eine andere Theorie der Zyklonenbildung, die dieses alles leistet, ist mir nicht bekannt.

Die Einwände, die gegen diese Wellentheorie der Zyklonenbildung erhoben worden sind, beruhen meistens darauf, daß man:

1. die Wirbeltheorie nur in der speziellen Helmholtzschen Form kennt (Erhaltung der Wirbel, barotroper Fall) nicht in dem allgemeinen Fall der Wirbelbildung und Wirbelvernichtung (barokliner Fall); das einzige Lehrbuch, das meines Wissens diese allgemeine Theorie aufgenommen hat, ist das oben zitierte, Appell: Traité de Mécanique rationelle, Tome III, Troisiéme Édition, Paris 1921, Chapitre XXXVII, Fluides Baroclines);

2. daß man aus diesem Grunde den vollen Zusammenhang zwischen Welle und Wirbel nicht aufgefaßt hat, der so intim ist, daß eine Wellentheorie der Zyklonen immer eine Wirbeltheorie bleibt. Umgekehrt wird man auch nie bei den in der Atmosphäre herrschenden Verhältnissen angeben können, wann der letzte Rest des Wellenstadiums aufhört und die reine Wirbelbewegung eintritt.

10. Zur Fortsetzung der Arbeit. Die »Wellentheorie der Zyklonenbildung« hat vielfach zu Diskussionen und Meinungsäußerungen Anlaß gegeben, die ziemlich unfruchtbar verlaufen sind, teils aus den oben erwähnten speziellen Gründen, vor allem aber weil man nicht darauf aufmerksam gewesen ist, daß es sich um eine mathematisch wohldefinierte Aufgabe handelt, die uns unmittelbar von der Natur selbst gestellt ist. Es gibt in der dynamischen Meteorologie keinen Weg, der um diese Aufgabe außen herum führt. Nachdem jetzt die präzise mathematische Formulierung der Aufgabe vorliegt, wird hoffentlich jede Unklarheit über die Natur des Problems verschwunden sein, so daß die nützliche positive Arbeit einsetzen kann.

Für diese Arbeit gibt es zwei Wege.

Der eine ist der mathematische: immer allgemeinere Lösungen der atmosphärischen Störungsgleichungen zu suchen. Dabei sei gleich folgendes bemerkt. Für das allgemeine Studium der atmosphärischen Störungsgleichungen — noch ohne Gedanke an Spezialintegrationen — eignen sich wohl die nicht spezialisierten Gleichungen des Abschnittes 5 am besten, oder solche Spezialfälle derselben, die ihre volle Symmetrie bewahrt haben. Man bemerke in dieser Verbindung, daß sich die allgemeinen Störungsgleichungen des Abschnittes 5 in einfache Vektorform konzentrieren lassen. Wenn man dann zu Spezialfällen übergeht, ist es nicht im voraus sicher, daß der hier explicite behandelte Fall, wo geradlinige Gradientströme zu Grund gelegt werden, auch der wirklich einfachste sein wird. Krummlinige Gradientströme, die sich der wirklichen Gestalt der Erde anschließen, kommen der Wirklichkeit näher, und bieten gleichzeitig mathematisch den Vorteil, das die ganze Erscheinung dem endlichen Teil des Raumes angehört. In diesem Falle führt man am besten geographische Koordinaten ein, und gelangt zu dem einfachsten Fall dieser Art, wenn die Diskontinuitätsfläche den Erdboden längs eines Parallelkreises schneidet, längs der idealen Helmholtzschen »Polarfront«.

Der andere Weg ist der empirische: auf den synoptischen Karten so genau wie möglich zu verfolgen, wie uns die Natur die Integration der atmosphärischen Störungsgleichungen vorführt. Diese Arbeit wird, wenn sie vollwertig sein soll, nicht weniger beschwerlich sein, als die mathematische. Ein erster ernster Versuch einer solchen Arbeit ist die von Bergeron und Swoboda: »Wellen und Wirbel an einer quasistationären Grenzfläche über Europa«, Veröff. d. Geophys. Inst. Leipzig, 2. Serie, III, H. 2. Nur wer Gelegenheit gehabt hat, es selbst zu sehen, ahnt, welche Mühe eine solche Arbeit kostet. Aber ohne konkrete Arbeiten dieser strengen Gewissenhaftigkeit wird man nicht vorwärts kommen. Arbeiten dieser Art werden von unschätzbarem Wert sein für die richtige Führung der parallelen mathematischen Untersuchung. Besonders ist folgendes zu beachten: die Störungsgleichungen sind, um mathematisch handlich zu werden, auf lineare Form reduziert. Sie können deshalb nur die Gesetze eines Durchgangsstadiums geben, solange die Störungen noch klein sind. Nur die empirischen Untersuchungen können aber entscheiden, bis zu welcher Grenze die für kleine Störungen gefundenen Gesetze sich auch für große gültig erweisen werden, und wo man die noch schwerere mathematische Arbeit mit den Gleichungen für endliche Störungen anzufangen hat.

Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben.[1])

Von **HANS FROMM** in Berlin.

Die Anregung zu vorliegender Arbeit gaben die Versuche zur Reibung fester Körper an zylindrischen Reibungstrieben, welche Herr G. Sachs während meiner Tätigkeit am Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule zu Berlin dort an der von Herrn Professor Dr. Eugen Meyer entworfenen Versuchseinrichtung ausführte. Im Anschluß an diese Versuche unternahm ich selbst mit Genehmigung von Herrn Meyer die experimentelle Ermittlung der Abhängigkeit des Schlupfes von der Normalkraft beim Fehlen einer Umfangskraft, deren Ergebnisse qualitativ den erwarteten Beziehungen entsprachen. Das Streben nach einer quantitativen Erfassung der Zusammenhänge führte zu der vorliegenden Arbeit, deren Wert weniger in einer für praktische Bedürfnisse brauchbaren Formel zur Berechnung von Reibungstrieben als darin zu suchen ist, daß sie Anhaltspunkte dafür liefert, wie man sich die Vorgänge an der Berührungsfläche aufeinander abrollender elastischer Scheiben vorstellen darf.

Das Problem der Berechnung des Schlupfes für beliebige Belastungen bei vollkommen elastischer Deformation ist soweit gelöst worden, wie dies ohne Benutzung der Lösungsmethoden der Integralgleichungstheorie möglich erschien. Für den Fall gleicher Elastizitätskonstanten der beiden Scheiben kann in diesem Rahmen eine Lösung durchgeführt, für den Fall verschiedener Schubmoduln vorbereitet werden. Ueber den Gang der Berechnung vergleiche die Bemerkungen am Schlusse von **2.**

I. Einleitung.

1. Definition und Zerlegung des Schlupfes. Einteilung der Berührungsfläche. Zwei deformierbare Körper von ursprünglich kreiszylinderförmiger Gestalt mögen so gegeneinander gedrückt und gleichzeitig gedreht werden, daß die im Raume feststehenden Achsen der Zylinder einander parallel sind und daß eine Energieübertragung von der einen Scheibe auf die andere stattfindet. Die Scheibe, welche in der Berührungsfläche mehr Energie abgibt als sie dort aufnimmt, heiße die »treibende Scheibe«, auf sie bezügliche Angaben seien durch den Index »1« gekennzeichnet, während die in der Berührungsfläche mehr Energie aufnehmende Scheibe als »getriebene Scheibe« bezeichnet werde und auf sie der Index »2« Bezug haben soll[2]).

Der Bewegungs- und der Deformationszustand der Scheiben möge als ein stationärer vorausgesetzt werden in dem Sinne, daß beide in jedem Punkt des ruhenden Raumes unabhängig von der Zeit sind. Jede Scheibe für sich vollführt eine periodische Bewegung, da sie sich nach Ablauf einer gewissen Zeitstrecke Z wieder in derselben Lage und auch demselben Zustande der Deformation befindet wie zu Beginn. Dieser Zeitstrecke kommt die Bedeutung der Periode oder Umlaufszeit zu und ihr entsprechend kann man die »Winkelgeschwindigkeit der deformierbaren Scheibe« $\left(\omega_1 = \frac{2\pi}{Z_1} \text{ bzw. } \omega_2 = \frac{2\pi}{Z_2}\right)$ einführen, welche für den Grenzfall der Starrheit mit der in üblicher Weise für starre Körper definierten gleichnamigen Größe identisch wird.

Unter diesen Voraussetzungen[3]) besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Verzerrung an einem beliebigen Punkte der Scheibe. Ist r der ursprüngliche Abstand des Punktes von der Achse und ε die Dehnung, welche ein ursprünglich senkrecht zur Achse tangential gerichtetes Bogenelement an der betreffenden Stelle

---

[1]) Als Dissertation zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs der Technischen Hochschule zu Berlin vorgelegt. Referenten: Prof. Dr. Eugen Meyer, Prof. Dr. G. Hamel.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. Eugen Meyer, spreche ich hierdurch meinen besten Dank für die Förderung meiner Arbeit durch sein ständiges Interesse an ihrem Fortgange aus. Weiter danke ich Herrn Dr.-Ing. G. Sachs für wiederholte Anregungen und Herrn Professor J. Jahn, Danzig, für das freundliche Entgegenkommen, mit dem er mir sein Versuchsprotokoll zur Verfügung stellte.

[2]) In dem physikalisch möglichen Falle, daß beide Scheiben treibend sind, soll die Wahl der Indizes offen bleiben. Dieser Fall tritt unter den im folgenden gemachten Voraussetzungen nicht ein.

[3]) Diese sind z. B. bei gleichförmiger Drehung von Scheiben aus isotropem homogenem elastischem Material erfüllt.

erfährt, so ist die Geschwindigkeit durch $v = r\,\omega\,(1+\varepsilon)$ gegeben. Denn anstelle eines Bogenelements von der ursprünglichen Länge ds_0 wird bei stationärer Bewegung in demselben Zeitelement dt die gedehnte Länge $ds = ds_0\,(1+\varepsilon)$ zurückgelegt und $\frac{ds_0}{dt} = r\,\omega$ würde die Geschwindigkeit bei starrer Scheibe sein. Es ist bemerkenswert, daß die Verzerrung, abgesehen von der tangentialen Dehnung ε, etwa durch die Aenderung des ursprünglichen Mittelpunktsabstandes r auf die Größe von v keinen Einfluß hat.

Für einen Punkt der Berührungsfläche sind die Radien der Zylinder (R_1 und R_2) einzusetzen, so daß hier

$$v_1 = R_1\,\omega_1\,(1+\varepsilon_1) \quad \text{und} \quad v_2 = R_2\,\omega_2\,(1+\varepsilon_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gilt. Bei ebener Verzerrung der Scheiben sind diese Geschwindigkeiten einander parallel, so daß die Gleitgeschwindigkeit in dem betrachteten Randpunkte durch $v_g = v_1 - v_2$ gegeben ist.

Nun bedeute $\omega_2{}^0$ die zu ω_1 gehörige Winkelgeschwindigkeit der getriebenen Scheibe, die vorhanden wäre, wenn beide Scheiben als starre Zylinder aufeinander ohne Gleiten abrollten, so daß also

$$R_1\,\omega_1 = R_2\,\omega_2{}^0$$

ist. Als »Schlupf« sei dann der Wert

$$s = \frac{\omega_2{}^0 - \omega_2}{\omega_2{}^0} = \frac{R_2\,\omega_2{}^0 - R_2\,\omega_2}{R_2\,\omega_2{}^0} = \frac{R_1\,\omega_1 - R_2\,\omega_2}{R_1\,\omega_1}$$

bezeichnet. Man findet aus (1), wenn ε_2 gegen 1 vernachlässigt wird,

$$s = \frac{v_g}{R_1\,\omega_1} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = s_g + \varepsilon_\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

womit eine Zerlegung des Schlupfes für jeden Punkt der Berührungsfläche in einen »Gleitschlupf« s_g und einen »Formänderungsschlupf« s_ε gegeben ist.

Die Gesamtheit der Punkte der Berührungsfläche, für die $s_g = 0$ ist, bildet das »Haftgebiet«, der Rest der Berührungsfläche das »Gleitgebiet«. Eine weitere Teilung des Gleitgebietes danach, ob $s_g \gtrless 0$ ist, fällt mit einer Einteilung nach dem Vorzeichen der durch Reibung erzeugten Tangentialspannung zusammen, da hier die Richtung der Reibungskraft mit der Richtung der Gleitgeschwindigkeit wechselt; nach diesem Gesichtspunkt zerfällt aber auch das Haftgebiet und damit die ganze Berührungsfläche in drei Teile, je nachdem die Tangentialspannung $t \gtrless 0$ ist. In demjenigen dieser Teile, welcher das Gleitgebiet mit $s_g > 0$ enthält, wird Energie von der treibenden auf die getriebene Scheibe übertragen, in dem Teile, welcher das Gebiet mit $s_g < 0$ enthält, in umgekehrter Richtung, wobei der erstgenannte Energiebetrag nach der Definition der treibenden Scheibe überwiegt, in Punkten mit $t = 0$ findet keine Energieübertragung statt. Im Gleitgebiet treten Reibungsverluste ein, im Haftgebiet dagegen nicht.

Nach der gegebenen Definition ist der Schlupf eine für den Rollvorgang als Ganzes charakteristische Größe, in dem er das verhältnismäßige Zurückbleiben (oder Voreilen) der getriebenen Scheibe kennzeichnet. Für den Formänderungsschlupf gilt dies nur im Haftgebiet, während er, ebenso wie der Gleitschlupf, im Gleitgebiet von Punkt zu Punkt veränderlich ist. Im Gegensatz zu dieser Zerlegung des Rollschlupfes in zwei variable Glieder mit konstanter Summe, welche zur mathematischen Formulierung von Randbedingungen zweckmäßig erscheint, finden sich in der Literatur[1]) zahlreiche Einteilungen und Definitionen von abweichender Bedeutung mit ähnlichen Namen, auf welche hier nicht näher eingegangen werden kann.

2. Das Problem und seine Randbedingungen. Die Annahme, daß sich die beiden aufeinander abrollenden Körper in einer Fläche berühren, ist an die Voraussetzung

---

[1]) O. Reynolds, On Rolling-Friction. Philos. Transact. of the Royal Soc. of London, Vol. 166, (1876), S. 155 uf.

J. Jahn, Die Beziehungen zwischen Rad und Schiene hinsichtlich des Kräftespiels und der Bewegungsverhältnisse. Z. d. V. D. I. 62 (1918), S. 145.

Stiel, Theorie des Riementriebs. Berlin 1918, S. 73.

L. Gümbel, Wer ist der wirklich Blinde? Berlin 1920.

S. Fuchs, Gleit- und Rollwiderstand der festen Körper. Phys. Zeitschr. XXII (1921), S. 214.

G. Sachs, Versuche über die Reibung fester Körper an zylindrischen Reibungstrieben. Diss, Berlin 1923, S. 11, und diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), Heft 1, S. 14, 15.

geknüpft, daß Abweichungen der wirklichen Oberfläche von der in die Betrachtung eingeführten Gestalt, d. h. also Rauhigkeitserhebungen sehr klein gegenüber der Ausdehnung der Berührungsfläche sind. Nun wird man solche Erhebungen stets annehmen müssen, selbst wenn sie nur von der Größenordnung der Atomabstände sind. Im allgemeinen wächst aber die Berührungsfläche mit der Anpressungskraft von Null aus; die obigen Betrachtungen haben also erst von einer gewissen Minimalkraft ab Gültigkeit, welche mit der Rauhigkeit der Oberfläche und der Härte des Materials wächst, mit der Krümmung der Oberfläche abnimmt[1]).

Im folgenden soll stets eine solche Beschaffenheit der Materie und ihrer Oberfläche und eine solche Belastung vorausgesetzt werden, daß die Annahme einer Berührungsfläche berechtigt ist. Dann dürfen auch die Ausführungen der vorigen Nummer Anwendung finden.

Es soll nun versucht werden, unter geeigneten Annahmen den Schlupf eines Rolltriebes in Abhängigkeit von der in der Berührungsfläche wirkenden Kraft zu berechnen. Nach Gl. (1) und (2) kommt dies auf die Ermittlung des Zusammenhanges zwischen den Verzerrungen und Gleitgeschwindigkeiten in der Berührungsfläche hinaus, der von Reynolds[2]) qualitativ untersucht und an Gummiwalzen beobachtet wurde mit dem Ergebnis, daß ein Haftgebiet in der Mitte der Berührungsfläche von zwei Gleitgebieten mit $s_g > 0$ eingeschlossen wird.

Die Verteilung von Haftgebiet und Gleitgebiet über die Berührungsfläche wird außer von den Versuchsbedingungen besonders davon abhängen, welchem Gesetz der Reibungskoeffizient μ folgt Ist dieser von der Gleitgeschwindigkeit v_g derart abhängig, daß nur für $\mu = 0$ auch $v_g = 0$ ist, wie es z. B. nach Versuchen von Jakob[3]) vermutet wurde, so kann man erwarten, daß das Haftgebiet in eine »Haftlinie« (oder mehrere) ausartet, welche die Grenze zwischen zwei Gleitgebieten ist. Im folgenden soll die Annahme gemacht werden, daß der Betrag des Reibungskoeffizienten μ im Gleitgebiet den konstanten Wert μ_0 habe, im Haftgebiet aber $0 \leqq |\mu| \leqq \mu_0$ sei. Dann existieren im allgemeinen Haftgebiete und Gleitgebiete von endlicher Größe. Bezeichnen p die normalen Druckspannungen am Umfang der Scheiben und t die schon er-

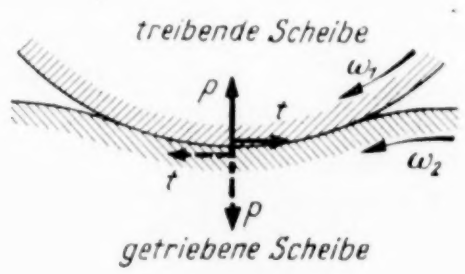


Abb. 1.

[1]) Bis zu dieser Grenze, die oberhalb der Bruchgrenze liegen kann, mögen Ueberlegungen von Vorteil sein, wie sie u. a. bei Brix (Ueber die Reibung und den Widerstand der Fuhrwerke auf Straßen, Berlin 1850, S. 159) zu finden sind, der sich das Rollen auch als ein sich wiederholendes Herausheben eines Polygons aus stabilen Gleichgewichtslagen vorstellt. Sie können unter geeigneter Abänderung (s. Brix) auch Anwendung finden, wenn zwar die Annahme der Berührungsfläche und die Vorstellung der damit auftretenden Erscheinungen berechtigt ist, der weiteren, insbesondere mathematischen Behandlung aber Schwierigkeiten durch grobe Inhomogenität des Materials entstehen, wie dies z. B. bei faseriger oder grobkristalliner Struktur der Fall ist, oder bei Härteunterschieden, die durch Herunterwalzen ursprünglich vorhanden gewesener großer Rauhigkeiten oder sonstige Einflüsse entstanden sind.

Es darf wohl darauf hingewiesen werden, daß die Vorstellung des »Heraushebens« aus einer Gleichgewichtslage zunächst nur den Widerstand beim Anfahren erklärt. Darauf aber wird durch das »Fallen« Energie frei, die zunächst in Formänderungsarbeit umgesetzt wird. Sind die Formänderungen vollkommen elastisch, so kommt es zu Schwingungen und es bestehen nur die beiden Möglichkeiten, daß entweder nach einer gewissen Zeit die Schwingungsenergie konstant bleibt, also ein Rollwiderstand nicht existiert, oder daß infolge der ständig geleisteten Rollarbeit die Schwingungsenergie unbegrenzt wächst. Die erste Möglichkeit wird man auf Grund der Erfahrungen ausschließen dürfen, bei der zweiten werden die Amplituden der Schwingungen sich in den Grenzen der elastischen Deformation halten können, solange ein Weitertransport der Energie durch die Oberfläche außerhalb der Berührungsfläche an die angrenzende Luft oder andere Körper möglich ist. Wenn demnach die Erklärung des Rollwiderstandes durch vollkommen elastische Formänderungen allein nicht unmöglich erscheint (vergl. hiergegen R. v. Mises, Dynamische Probleme der Maschinenlehre, Enz. d. math. Wiss. Bd. IV, Art. 10 (1911), S. 202, Anm.), so wird man doch auch — wenn nicht sogar in erster Linie — mit unvollkommener Elastizität zu rechnen haben, und zwar mit Nachwirkungserscheinungen und bleibenden Formänderungen. Entsprechendes gilt übrigens für die Versuche, die gleitende Reibung durch elastische Formänderungen in den Gleitflächen zu erklären, gleichgültig ob man sie sich mit Borsten oder mit sonstigen Unebenheiten bedeckt denkt.

[2]) O. Reynolds, a. a. O.

[3]) Ch. Jacob, Ueber gleitende Reibung. Diss. Königsberg, Leipzig 1911.

wähnten Tangentialspannungen, welche bei Scheibe 1 entgegen der Bewegungsrichtung, bei Scheibe 2 in Richtung der Bewegung positiv gerechnet werden (Abb. 1), so ist außerhalb der Druckfläche

$$p = t = 0,$$

im Gleitgebiet $t = \mu_0 p$ für $s_g > 0$ und $t = -\mu_0 p$ für $s_g < 0$

im Haftgebiet $t = \mu p \quad -\mu_0 \leq \mu \leq \mu_0$ und $s_g = 0$, also $s = s_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \text{konst.}$[1]) $\Big\}$ (3).

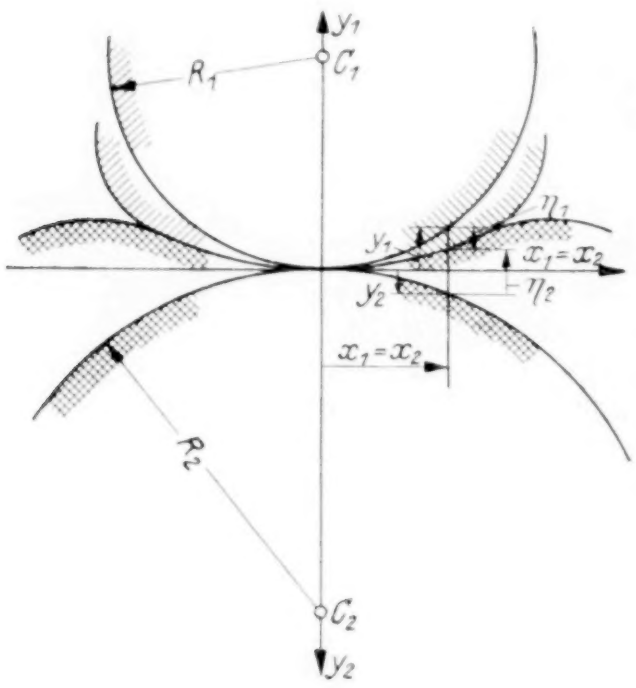


Abb. 2.

Eine weitere Randbedingung liefert die Beziehung zwischen den Verschiebungen und Koordinaten der Punkte der Berührungsfläche und den Radien der beiden Zylinder[2]). In zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen, deren Lage zu den nicht deformierten Scheiben aus Abb. 2 ersichtlich ist, seien x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 Koordinaten zweier Randpunkte vor der Deformation, welche infolge der Deformation auf der Berührungsfläche zusammenfallen, ferner η_1 und η_2 ihre Verschiebungen in Richtung ihrer positiven y-Achsen, so lautet die Beziehung unter Vernachlässigung der Verschiebungen in Richtung der x Achsen $\eta_1 + \eta_2 + y_1 + y_2 = 0$. Setzt man noch nahe am Ursprung näherungsweise

$$y_1 = \frac{x^2}{2 R_1}, \qquad y_2 = \frac{x^2}{2 R_2},$$

wobei vierte und höhere Potenzen von (x/R) gegen 1 vernachlässigt sind, so ergibt sich die Randbedingung in der Form

$$\eta_1 + \eta_2 = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Die Ausdrücke

$$\int_{(F)} p \cdot dF \quad \text{und} \quad \int_{(F)} t \cdot dF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

in denen F die Projektion der Berührungsfläche auf eine zu den y-Achsen senkrechte Ebene ist, liefern mit großer Annäherung die Y- und X-Komponenten der von der getriebenen auf die treibende Scheibe übertragenen Kraft, welche als »Preß- oder Normalkraft« und »Umfangs- oder Tangentialkraft« bezeichnet werden sollen. Als dritte Randbedingung muß dann gelten, daß auf die Zylinderachsen Kräfte und Momente wirken sollen, die an jeder Scheibe mit der Normalkraft und der Tangentialkraft im Gleichgewicht sind.

Die Formänderungen in größeren Entfernungen von der Druckfläche wird man als elastische betrachten dürfen. Dagegen lassen Versuche über den Schlupf[3]) und der Umstand, daß im allgemeinen Gleitungen in der Berührungsfläche vorkommen, vermuten, daß bei jedem Rollvorgang plastische Deformationen stattfinden. Es soll nun unter einem »wesentlich elastischen Rollvorgang« ein solcher verstanden werden, bei dem höchstens die Rauhigkeitserhebungen der Oberflächen durch Normal- und Reibungsspannungen plastisch verformt werden, wie dies etwa durch eine Theorie der Reibung gefordert werden könnte, aber so, daß die Gestaltänderungen der gedachten Oberflächen einer elastischen Verformung der Scheiben entsprechen. »Wesentlich plastisch« dagegen soll ein Rollvorgang heißen, wenn plastische Verformungen auch an solchen Stellen entstehen, deren Entfernungen von der Berührungsfläche von der Größenordnung der Breite dieser Fläche sind[4]).

[1]) Vergl. hierzu auch die allgemeinen Betrachtungen von Gümbel, a. a. O. S. 57.

[2]) Vergl. H. Hertz, Ueber die Berührung elastischer Körper. Gesammelte Werke Bd. I, Leipzig 1895, S. 155 ff, oder Journal für reine und angew. Math. Bd. 92 (1881), S. 156 ff.

[3]) Vergl. z. B. Jahn, a. a. O. S. 146, und besonders Sachs, diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 28.

[4]) Der wesentlich plastische Vorgang dürfte bei nicht spröden Materialien mit hinreichend großen Kräften in der Berührungsfläche verwirklicht werden können. Die Möglichkeit wesentlich elastischen Rollens hängt dagegen weit mehr von der Rauhigkeit der Oberflächen ab, da hierzu verhältnismäßig kleine Kräfte notwendig sind, die aber noch die Bedingung der Minimalkraft erfüllen müssen. Für Kräfte mittlerer Größe wird man »komplizierte Rollvorgänge« annehmen müssen, die ebenso wie das Rollen bei Unterschreitung der Minimalbedingung (»Holpern«) einer exakten Berechnung schwer zugänglich sein werden.

Hier soll nur der Fall wesentlich elastischen Rollens unter der Voraussetzung näher untersucht werden, daß das Hookesche Gesetz hinreichend genau erfüllt ist. Diese schließt also die Annahme ein, daß trotz großer Verzerrungsgeschwindigkeiten der Einfluß der elastischen Nachwirkung gering ist. Ferner sollen Massenkräfte vernachlässigt werden, wodurch die Lösung für einige Punkte unendlich große Verzerrungsgeschwindigkeiten ergibt. Schließlich sollen die Scheiben als nach beiden Seiten unendlich lang angenommen werden, wodurch ein Problem ebener Verzerrung entsteht. Insbesondere wird man ohne großen Fehler die Dehnung in achsialer Richtung Null setzen dürfen. Bedeuten nun in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinaten-System x, y, in üblicher Weise ξ, η die Verschiebungen, σ_x, σ_y, σ_z die Normalspannungen, $\tau_{x,y}$ die Schubspannungen (vergl. Abb. 3), ferner G den Schubmodul und m die Poissonsche Konstante, so lauten die elastischen Grundgleichungen für den vorliegenden Fall:

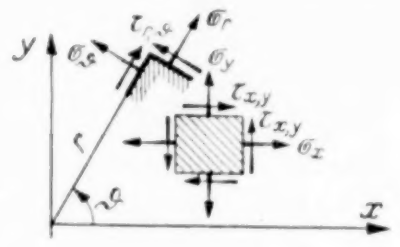


Abb. 3.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,G\cdot\left[\frac{\partial\,\xi}{\partial\,x}+\frac{\frac{\partial\,\xi}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\eta}{\partial\,y}}{m-2}\right], \qquad \sigma_y = 2\,G\cdot\left[\frac{\partial\,\eta}{\partial\,y}+\frac{\frac{\partial\,\xi}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\eta}{\partial\,y}}{m-2}\right] \\ \tau_{x,y} &= G\cdot\left(\frac{\partial\,\xi}{\partial\,y}+\frac{\partial\,\eta}{\partial\,x}\right), \qquad (\tau_{y,x}=\tau_{z,x}=0) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial\,\xi}{\partial\,x} = \frac{(m-1)\,\sigma_x-\sigma_y}{2\,G\,m}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial\,\eta}{\partial\,y} = \frac{(m-1)\,\sigma_y-\sigma_x}{2\,G\,m} \\ &(\zeta = \text{konst} = 0 \text{ gesetzt}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6\,\text{a}).$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist für den Spezialfall $\mu = 0$ eine Lösung des Problems in der Theorie der Berührung elastischer Körper von Hertz bekannt. Für diese Theorie bedeutet die Nichtberücksichtigung der Nachwirkung und der Massenkräfte bei ruhender Belastung natürlich keine Vernachlässigung und auch die Vernachlässigung der Reibung in der Berührungsfläche würde keinen Fehler mit sich bringen, wenn der Reibungskoeffizient mit der Geschwindigkeit nach Null geht. Zur Lösung des Problems unter Berücksichtigung der Reibung wird hier folgender Weg eingeschlagen: Es werden die Verschiebungen der Punkte einer vollen Kreisscheibe ermittelt, wenn an einem Punkte ihres Umfanges eine Einzelkraft entweder radial nach innen (Fall I) oder tangential (Fall II) wirkt und im Mittelpunkte jedesmal durch eine Gegenkraft und im Fall II außerdem durch ein Moment das Gleichgewicht gehalten wird. Aus der im Sinne der klassischen Elastizitätstheorie exakten Lösung werden bequemere Näherungsformeln für die Verschiebungen der Randpunkte in der Umgebung des Angriffspunktes der Kraft gewonnen.

Sodann werden die Randkoordinaten der Berührungsfläche (jetzt auch Druckfläche genannt) und die beiden Funktionen p und t der Koordinaten in dieser, welche die Druckspannungen und Reibungsspannungen bedeuten sollen, als Unbekannte eingeführt. In Abhängigkeit von diesen werden unter Benutzung der Lösungen für Einzelkräfte durch Integralbildung die Verschiebungen in der Druckfläche dargestellt, welche den Randbedingungen genügen müssen. Durch Kombination mit diesen entstehen zwei Integralgleichungen für die Funktionen p und t.

Sind die Elastizitätsmoduln der beiden Scheiben einander gleich, so kann eine Lösung der geeignet vereinfachten Gleichungen unter Benutzung des Ergebnisses der Hertzschen Theorie der Berührung angegeben werden. Anderenfalls gelingt eine Zurückführung der beiden Gleichungen auf eine Integralgleichung.

II. Deformation einer Scheibe durch Einzelkräfte am Rande.

In diesem Abschnitt soll nach den Gewohnheiten bei Behandlung ebener Probleme nur ein Querschnitt eines Zylinders, also ein Kreis betrachtet werden, und dementsprechend soll unter einer Kraft, welche in einem Punkte der x, y-Ebene wirkt, der Anteil einer längs einer zur Zylinderachse parallelen Geraden gleichmäßigen Kraftverteilung verstanden werden, welcher auf die Längeneinheit dieser Geraden entfällt.

3. Verschiebungen durch eine Normalkraft (Fall I). Eine Kraft P im Mittelpunkte C eines Zylinderquerschnittes möge mit einer Kraft $Q\,(=P)$ im Randpunkte B des Querschnittes im Gleichgewicht sein, während der übrige Rand spannungslos ist. Die

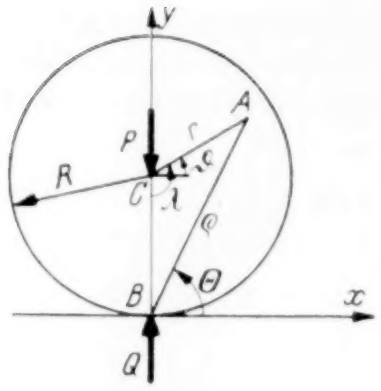


Abb. 4.

Verzerrungen und Spannungen zu diesem Belastungsfall (I) können nun durch Superposition dreier Zustände gewonnen werden, zu deren Darstellung drei Koordinatensysteme x, y; r, ϑ und ϱ, Θ eingeführt werden sollen, deren Lage aus Abb. 4 hervorgeht.

Der erste Zustand entspreche der Wirkung einer Kraft P in C auf die unbegrenzte x, y-Ebene. Seine Verschiebungen können, wie aus der Theorie der Verzerrungskerne bekannt ist, durch

$$\left.\begin{aligned} \xi_P &= -\frac{P\cdot m}{8\,\pi\,(m-1)\,G}\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta \\ \eta_P &= \frac{P}{8\,\pi\,(m-1)\,G}\cdot[(3\,m-4)\cdot\ln r+m\cos^2\vartheta] \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

gegeben werden. Zu diesen gehört [nach den Grundgleichungen (6)] die Spannungsverteilung

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{4\,\pi\,(m-1)}[-(m-2)+2\,m\cos^2\vartheta]\frac{\sin\vartheta}{r} \\ \sigma_y &= \frac{P}{4\,\pi\cdot(m-1)}[+(m-2)+2\,m\sin^2\vartheta]\frac{\sin\vartheta}{r} \\ \tau_{x,y} &= \frac{P}{4\,\pi\cdot(m-1)}[(m-2)+2\,m\sin^2\vartheta]\frac{\cos\vartheta}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Formeln, indem man aus der x, y Ebene ein beliebiges den Punkt C enthaltendes Gebiet durch eine geschlossene Kurve herausschneidet und für diese aus (8) die Randspannungen ermittelt. Integration über den Rand ergibt eine Resultierende, welche mit P in C im Gleichgewicht ist.

Der zweite Zustand entspricht der Wirkung einer Kraft Q in B auf die durch $y>0$ gegebene Halbebene und kann durch die Verschiebungen

$$\xi_\varrho = \frac{Q}{2\,\pi\,G}\left[\frac{m-2}{m}\left(\Theta-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\Theta\cos\Theta\right], \qquad \eta_\varrho = -\frac{Q}{2\,\pi\,G}\left[2\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\ln\varrho+\cos^2\Theta\right] \quad (9)$$

dargestellt werden, zu welchen die »einfache radiale« Spannungsverteilung

$$\sigma_x = -\frac{2\,Q}{\pi}\cos^2\Theta\frac{\sin\Theta}{\varrho}, \qquad \sigma_y = -\frac{2\,Q}{\pi}\sin^2\Theta\frac{\sin\Theta}{\varrho}, \qquad \tau_{x,y} = -\frac{2\,Q}{\pi}\sin^2\Theta\frac{\cos\Theta}{\varrho} \quad (10)$$

gehört. Zur Prüfung der Richtigkeit ist hier ein Gebiet in der Halbebene zu wählen, dessen Rand den Punkt B enthält und in B die x-Achse zur Tangente hat, also z. B. eine Halbkreisfläche, deren gerade Begrenzung auf der x-Achse liegt und durch B halbiert wird.

Wendet man die Transformation

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x\cos^2\vartheta+\sigma_y\sin^2\vartheta+\tau_{x,y}\,2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \tau_{r,\vartheta} &= \tau_{x,y}(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)+(\sigma_y-\sigma_x)\sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

(vergl. Abb. 3) auf die Gl. (8) und (10) an, superponiert die Ergebnisse und setzt $Q=P$ und $r=R$, so erhält man die Randspannungen

$$\sigma_R = \frac{P}{2\,\pi\,R}\left[\frac{m}{2\,(m-1)}\sin\vartheta-1\right], \qquad \tau_{R,\vartheta} = -\frac{P}{2\,\pi\,R}\frac{m}{2\,(m-1)}\cos\vartheta \quad \ldots \quad (12),$$

welche die Superposition der beiden beschriebenen Zustände liefert. Dabei ist zu beachten, daß für die Randpunkte $\lambda=\frac{\pi}{2}+\vartheta=2\cdot\Theta$ ist und $\frac{\sin\Theta}{\varrho}=\frac{1}{2\,R}$ auch für $\varrho\to 0$ gilt (Abb. 4).

Als dritter Zustand muß nun ein solcher gewählt werden, welcher überall stetige Verzerrungen und Spannungen besitzt und durch Superposition mit den beiden ersten Zuständen die Erfüllung der Randbedingung liefert, daß die Randspannungen überall Null sind. Den dritten Zustand kann man sich also dadurch erzeugt denken, daß man den Querschnittskreis am Umfange durch Spannungen belastet, die durch (12) nach Umkehrung der Vorzeichen dargestellt werden. Diese Spannungen (sie mögen (12*) heißen) sind am Kreise im Gleichgewicht, weil die Spannungen (12) mit P und Q im Gleichgewicht sind, P und Q aber selbst wieder ein Gleichgewichtssystem bilden. Die zu (12*) gehörige stetige Spannungsverteilung im Kreise kann also nach Formeln von Hertz[1]) berechnet werden, wie folgt:

---

[1]) H. Hertz, Ueber die Verteilung der Druckkräfte in einem elast. Kreiszylinder. Ges. Wke. Bd. I Leipzig 1895 S. 283 oder Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 28 (1883), S. 125.

Bezeichnet p die Spannung auf dem Umfang im Punkte $U\,(R, \vartheta + \varphi)$ mit den Komponenten $\sigma = p\cos(p, R)$ und $\tau = -p\sin(p, R)$, so wirkt in dem Aufpunkte $A\,(r, \vartheta)$ an dem Flächenelement mit der äußeren Normalen n ein Spannungsvektor, dessen Komponente in Richtung m von Hertz mit M_n bezeichnet wird und nach ihm den Wert hat (Bezeichnungen nach Abb. 5):

$$M_n = \frac{2R}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{p\cdot\cos(p,s)}{s}\cdot\cos(n,s)\cos(m,s)\cdot d\varphi - \frac{\cos(n,m)}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} p\cdot\cos(p,R)\cdot d\varphi\,.$$

Wegen $p\cdot\cos(p,s) = \sigma\cdot\cos(R,s) + \tau\cdot\sin(R,s)$ wird mit elementaren Umformungen

$$M_n = \frac{2R}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{(R - r\cos\varphi)\cdot\sigma + r\cdot\sin\varphi\cdot\tau}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi}\cdot\cos(n,s)\cdot\cos(m,s)\cdot d\varphi - \frac{\cos(n,m)}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\sigma\cdot d\varphi \quad (13).$$

Für die radiale Zugspannung σ_r in A haben nun n und m die Richtung von r, für die tangentiale Zugspannung σ_ϑ sind n und m gleichgerichtet, aber senkrecht auf r, und für die Schubspannung $\tau_{r,\vartheta}$ sind n und r gleichgerichtet, aber senkrecht auf m. Für diese Fälle läßt sich also $\cos(n,s)\cdot\cos(m,s)$ leicht durch R, r, $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ausdrücken. Für σ und τ in (13) sind nun die Werte aus (12*) zu wählen, wobei jedoch an Stelle von ϑ jetzt $(\vartheta + \varphi)$ zu setzten ist.

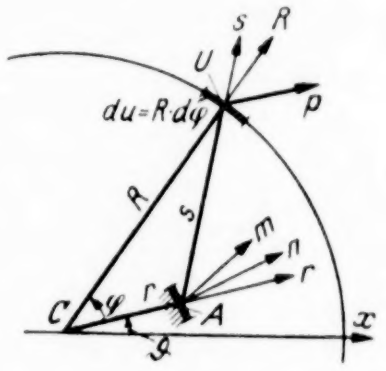


Abb. 5.

Die Lösung der Integrale in (13) bietet nun keine Schwierigkeiten mehr. Das Ergebnis lautet:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi R}\left[1 - \frac{m}{2(m-1)}\cdot\frac{r}{R}\sin\vartheta\right]$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{P}{2\pi R}\left[1 - \frac{3m}{2(m-1)}\frac{r}{R}\sin\vartheta\right], \qquad \tau_{r,\vartheta} = \frac{P}{2\pi R}\cdot\frac{m}{2(m-1)}\frac{r}{R}\cos\vartheta\,.$$

Damit ist auch der dritte Spannungszustand bekannt. Ihm entsprechen Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung von der Größe [vergl. Gl. (6a)]

$$\varepsilon_r = \frac{(m-1)\sigma_r - \sigma_\vartheta}{2Gm} = \frac{P}{8\pi GR}\cdot\left[2\frac{m-2}{m} + \frac{4-m}{m-1}\cdot\frac{r}{R}\cdot\sin\vartheta\right]$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{P}{8\pi GR}\cdot\left[2\frac{m-2}{m} - \frac{3m-4}{m-1}\frac{r}{R}\sin\vartheta\right].$$

Denkt man sich den Mittelpunkt C festgehalten, so wird die radiale Verschiebung eines Punktes $A\,(r, \vartheta)$

$$u = \int_0^r \varepsilon_r\, dr = \frac{P}{16\pi G}\cdot\left[4\frac{m-2}{m}\cdot\frac{r}{R} + \frac{4-m}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin\vartheta\right].$$

Für Punkte der Angriffsgeraden von P und Q ist $\cos\vartheta = 0$, also $\frac{\partial u}{\partial\vartheta} = 0$ und $\tau_{r,\vartheta} = 0$, d. h. die Gerade BC erleidet durch den dritten Spannungszustand keine Krümmung, wie es wegen der Symmetrie zu erwarten war. Fordert man nun, daß diese Gerade bei der Belastung der Scheibe durch die Spannungen (12*) keine Drehung um den festen Punkt C ausführt, so findet man für die tangentiale Verschiebung v des Punktes $A\,(r, \vartheta)$ wegen $\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\vartheta} + \frac{u}{r}$ den Wert

$$v = \int_{-\pi/2}^{\vartheta}(r\cdot\varepsilon_\vartheta - u)\cdot d\vartheta = \frac{P}{16\pi G}\frac{5m-4}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos\vartheta\,.$$

Die Verschiebungen zum dritten Zustand in Richtung der Achsen des Koordinatensystems x, y können also durch

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= u\cos\vartheta - v\sin\vartheta\\ &= \frac{P}{8\pi G}\cdot\left[2\frac{m-2}{m}\frac{r}{R}\cos\vartheta - \frac{3m-4}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right]\\ \eta_0 &= u\sin\vartheta + v\cos\vartheta\\ &= \frac{P}{8\pi G}\cdot\left[2\frac{m-2}{m}\frac{r}{R}\sin\vartheta - \frac{3m-4}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin^2\vartheta + \frac{5m-4}{2(m-1)}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

dargestellt werden.

Die Summen $\xi_I = \xi_P + \xi_Q + \xi_0$ und $\eta_I = \eta_P + \eta_Q + \eta_0$ von (7), (9) und (14) geben zu Belastungsfall I gehörige Verschiebungen — abgesehen von einer Translation und Rotation der starren Scheibe — an. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} \xi_I &= \frac{P}{8\pi G}\left\{ 4\frac{m-2}{m}\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\Theta\cos\Theta + 2\frac{m-2}{m}\cdot\frac{r}{R}\cos\vartheta \right\} \\ &\quad \left\{ -\left[\frac{m}{m-1} + \frac{3m-4}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\sin\vartheta\cos\vartheta \right\} \\ \eta_I &= \frac{P}{8\pi G}\left\{ -8\frac{m-1}{m}\ln\varrho - 4\cos^2\Theta + \frac{3m-4}{m-1}\ln r + 2\frac{m-2}{m}\frac{r}{R}\sin\vartheta \right\} \\ &\quad \left\{ -\left[\frac{m}{m-1} + \frac{3m-4}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\sin^2\vartheta + \left[\frac{m}{m-1} + \frac{5m-4}{2(m-1)}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \right\} \end{aligned}\right\} \quad (I).$$

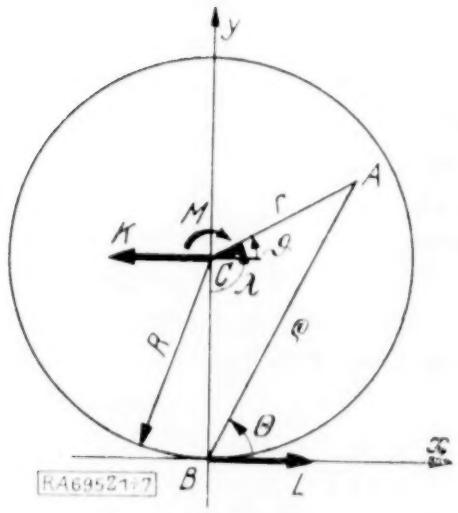


Abb. 6.

4. Verschiebungen durch eine Tangentialkraft am Rande (Fall II). Die Kräfte K im Mittelpunkt C eines Kreises und L im Randpunkte B mit zur x-Achse parallelen Angriffsgeraden mögen ein Kräftepaar bilden. Ein Moment M in C soll ihnen das Gleichgewicht halten, während der Rand spannungslos ist (Abb. 6). Die Behandlung dieses Belastungsfalles (II) kann analog dem Vorgehen beim Fall I durch Superposition von vier Zuständen erfolgen.

Für den ersten der alleinigen Wirkung von K in der ganzen Ebene entsprechenden Zustand lassen sich Verschiebungen und Spannungen aus den Gleichungen (7) und (8) dadurch erhalten, daß man an Stelle von

$$\xi_P, \quad \eta_P, \quad P, \quad \vartheta, \quad \sigma_x, \quad \sigma_y$$

entsprechend $\eta_K, \quad \xi_K, \quad K, \quad \frac{\pi}{2} - \vartheta, \quad \sigma_y, \quad \sigma_x$

einsetzt. Man erhält

$$\xi_K = \frac{K}{8\pi G}\cdot\left[\frac{3m-4}{m-1}\cdot\ln r + \frac{m}{m-1}\cdot\sin^2\vartheta\right], \qquad \eta_K = -\frac{K}{8\pi G}\cdot\frac{m}{m-1}\sin\vartheta\cos\vartheta$$

und

$$\sigma_x = \frac{K}{4\pi(m-1)}\cdot[(m-2) + 2m\cos^2\vartheta]\cdot\frac{\cos\vartheta}{r}$$

$$\sigma_y = \frac{K}{4\pi(m-1)}\cdot[-(m-2) + 2m\sin^2\vartheta]\cdot\frac{\cos\vartheta}{r}$$

$$\tau_{x,y} = \frac{K}{4\pi(m-1)}\cdot[(m-2) + 2m\cos^2\vartheta]\cdot\frac{\sin\vartheta}{r}.$$

Zu der Randkraft L in B gehöre der zweite Zustand mit den Verschiebungen in der Halbebene der positiven y

$$\xi_L = -\frac{L}{2\pi G}\cdot\left[2\frac{m-1}{m}\ln\varrho + \sin^2\Theta\right], \qquad \eta_L = -\frac{L}{2\pi G}\cdot\left[\frac{m-2}{m}\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\Theta\cos\Theta\right]$$

und den Spannungen

$$\sigma_x = -\frac{2L}{\pi}\cos^2\Theta\frac{\cos\Theta}{\varrho}, \qquad \sigma_y = -\frac{2L}{\pi}\sin^2\Theta\frac{\cos\Theta}{\varrho}, \qquad \tau_{x,y} = -\frac{2L}{\pi}\cos^2\Theta\frac{\sin\Theta}{\varrho},$$

die sinngemäß aus Gl. (9) und (10) gewonnen werden können.

Dem Moment $M = K\cdot R$ in C kann der dritte Verschiebungs- und Spannungszustand von besonders einfacher Form zugeordnet werden:

$$\xi_M = \frac{M}{4\pi G}\cdot\frac{\sin\vartheta}{r}, \qquad \eta_M = -\frac{M}{4\pi G}\cdot\frac{\cos\vartheta}{r}$$

oder in Polardarstellung

$$u = 0, \quad v = -\frac{M}{4\pi G\cdot r} \quad \text{und} \quad \sigma_r = \sigma_\vartheta = 0, \quad \tau_{r,\vartheta} = \frac{M}{2\pi r^2} = \frac{K\cdot R}{2\pi r^2}.$$

Für die Randspannungen, welche durch Superposition dieser drei Zustände entstehen, findet man nun — ähnlich wie bei Fall I — mit $L = K$

$$\sigma_R = \frac{K}{2\pi R}\frac{m}{2(m-1)}\cos\vartheta. \qquad \tau_{R\,\vartheta} = \frac{K}{2\pi R}\cdot\frac{m}{2(m-1)}\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Der stetige vierte Spannungszustand, der zwecks Erfüllung der Randbedingung den drei anderen noch zu überlagern ist, folgt also aus Gl (13), wenn man für σ und τ jetzt die Werte einsetzt, welche sich aus Gl. (15) durch Umkehrung der Vorzeichen und Ersatz von ϑ durch $(\vartheta + q)$ ergeben.

Er wird durch

$$\sigma_r = -\frac{K}{2\pi R^2}\frac{m}{(m-1)}\cdot\frac{r}{R}\cos\vartheta\,, \qquad \sigma_\vartheta = -\frac{K}{2\pi R^2}\frac{m}{(m-1)}\cdot 3\cdot\frac{r}{R}\cos\vartheta$$

$$\tau_{r,\vartheta} = -\frac{K}{2\pi R^2}\frac{m}{(m-1)}\frac{r}{R}\sin\vartheta$$

dargestellt und ist mit den Dehnungen

$$\varepsilon_r = \frac{K}{8\pi G R^2}\cdot\frac{4-m}{m-1}r\cos\vartheta\,, \qquad \varepsilon_\vartheta = -\frac{K}{8\pi G R^2}\cdot\frac{3m-4}{m-1}r\cos\vartheta$$

verbunden. Bei feststehendem Mittelpunkt C wird also die Radialverschiebung des Punktes A (r, ϑ)

$$u = \int_0^r \varepsilon_r \cdot d\,r = \frac{K}{16\pi G}\cdot\frac{4-m}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos\vartheta.$$

Für Punkte der Angriffsgeraden von K ist $\sin\vartheta = 0$, also $\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0$ und $\tau_{r,\vartheta} = 0$, d. h. diese Gerade erleidet durch den vierten Spannungszustand keine Krümmung. Würde sie auch keine Drehung um C erfahren, so wäre die Tangentialverschiebung des Punktes $A(r, \vartheta)$

$$v = \int_0^\vartheta (r\cdot\varepsilon_\vartheta - u)\,d\,\vartheta = \frac{-K}{16\pi G}\cdot\frac{5m-4}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin\vartheta.$$

Die Verschiebungen für diesen Zustand in Richtung der Achsen x und y sind dann durch

$$\xi_{00} = \frac{K}{8\pi G}\left(\frac{r}{R}\right)^2\cdot\left[\frac{4-m}{2(m-1)} + \frac{3m-4}{m-1}\sin^2\vartheta\right], \qquad \eta_{00} = -\frac{K}{8\pi G}\left(\frac{r}{R}\right)^2\cdot\frac{3m-4}{m-1}\sin\vartheta\cos\vartheta$$

gegeben. Damit sind auch zum Belastungsfall II gehörige Verschiebungen bekannt. Sie werden abgesehen von einer Translation und Rotation der starren Scheibe durch die Summen

$$\xi_{II} = \xi_K + \xi_L + \xi_M + \xi_{00} \qquad \text{und} \qquad \eta_{II} = \eta_K + \eta_L + \eta_M + \eta_{00}$$

dargestellt, also durch

$$\left.\begin{aligned}\xi_{II} = \frac{K}{8\pi G}\Bigg\{&-8\frac{m-1}{m}\ln\varrho - 4\sin^2\Theta + \frac{3m-4}{m-1}\ln r\\ &+\left[\frac{m}{m-1} + \frac{3m-4}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\cdot\sin^2\vartheta + \frac{4-m}{2(m-1)}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\frac{R}{r}\sin\vartheta\Bigg\}\\ \eta_{II} = \frac{K}{8\pi G}\Bigg\{&-4\frac{m-2}{m}\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\Theta\cos\Theta\\ &-\left[\frac{m}{m-1} + \frac{3m-4}{m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\sin\vartheta\cos\vartheta - 2\frac{R}{r}\cos\vartheta\Bigg\}\end{aligned}\right| \qquad \text{(II)}.$$

5. Verschiebungen der Randpunkte nahe der x-Achse. Die Gleichungen (I) und (II) verlieren bekanntlich nicht nur in den Polen B und C, sondern auch in einer gewissen Umgebung derselben ihre Gültigkeit, weil erstens eine Ueberschreitung der Proportialitätsgrenze sicher stattfinden würde, zweitens aber Dehnungen von kleinerem Werte als -1 auftreten müßten, was kinematisch unmöglich ist. Um C denke man sich einen hinreichend großen Kreis als Querschnitt einer Welle, welche auf den nun vorhandenen inneren Rand der Scheibe die durch die Gl. (I) bzw. (II) geforderten Spannungen überträgt. Anstelle einer Belastung durch eine Einzelkraft in B tritt bei der Berührung mit einer zweiten Scheibe eine verteilte Belastung durch Spannungen in der Druckfläche, welche sich infolge der physikalischen Unmöglichkeit von Polen in solcher Größe ausbildet, daß auch die Bedingung für die Dehnungen erfüllt ist, und durch geeignete Beschränkung der Belastung können dann auch die Spannungen im Proportionalitätsbereich gehalten werden.

Zur einfacheren Darstellung der Verschiebungen der Randpunkte in der Umgebung des Punktes B sei nun der Winkel $\lambda = \frac{\pi}{2} + \vartheta$ (Abb. 4) eingeführt, dessen Wert auf dem

Rande $\lambda = 2 \cdot \Theta$ wegen $0 \leqq \Theta \leqq \pi$ auf $0 \leqq \lambda \leqq 2 \cdot \pi$ zu beschränken wäre. Statt dessen erscheint es hier vorteilhafter, den Winkel λ im Intervall $-\pi \leqq \lambda \leqq +\pi$, also links und rechts von B zu gebrauchen, nur muß man dann $2\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = \lambda \mp \pi$ setzen, je nachdem $\lambda \gtrless 0$ ist. Für den Rand gilt aber weiter

$$\varrho^2 = \left[2\,R \cdot \sin\frac{\lambda}{2}\right]^2 = 2\,R^2\,(1 - \cos\lambda)$$

(aus Abb. 6 wegen $r = R$), also

$$\ln(\varrho^2) = \ln(R^2\,\lambda^2) - \frac{\lambda^2}{12} - \frac{\lambda^4}{1440} - \ldots$$

In dieser Entwicklung und in denen für $\sin\lambda$, $\cos\lambda$, $\sin\lambda \cdot \cos\lambda$ und $\cos^2\lambda$ sollen für Punkte in der Nähe von B zunächst die Glieder mit λ^3 und höheren Potenzen vernachlässigt werden, während solche mit λ^2 vorläufig noch beibehalten werden, damit ihr Einfluß auf die Veränderlichkeit der Verschiebungen mit λ abgeschätzt werden kann. Für die Randpunkte in der Nähe von B ergeben sich damit aus (I) und (II) die Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned}
\xi_{BI} &= \frac{P}{2\pi G} \cdot \left\{\frac{m-2}{m}(\mp\pi) + \frac{5m-4}{2m} \cdot \lambda\right\} \\
\eta_{BI} &= \frac{P}{2\pi G} \cdot \left\{-\frac{m-1}{m} \cdot \ln(R^2\lambda^2) + \frac{19m-7}{12m} \cdot \lambda^2 + \left[\frac{3m-1}{8(m-1)} \ln(R^2) - \frac{13m^2-24m+8}{8m(m-1)}\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(Ia)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_{BII} &= \frac{K}{2\pi G} \cdot \left\{-\frac{m-1}{m} \cdot \ln(R^2\lambda^2) - \frac{11m+1}{12m} \cdot \lambda^2 + \left[\frac{3m-4}{8(m-1)} \ln(R^2) + \frac{3m}{8(m-1)}\right]\right\} \\
\eta_{BII} &= \frac{K}{2\pi G} \cdot \left\{-\frac{m-2}{2m}(\mp\pi) + \frac{m+2}{2m} \cdot \lambda\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IIa)}.$$

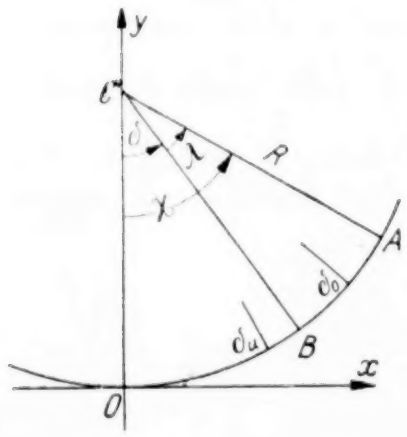


Abb. 7.

Liegt der Angriffspunkt B der Randkräfte nicht, wie bisher angenommen wurde, im Ursprung des Koordinatensystems x, y, so lassen sich die Verschiebungen durch eine Koordinatentransformation aus (Ia) und (IIa) finden. Die Normale in B möge mit der y-Achse den Winkel δ bilden, die Normale im Punkte A den Winkel $\chi = \delta + \lambda$ mit der y-Achse (Abb. 7). Die Verschiebungen ξ_B und η_B des Punktes A in den Richtungen der Tangente und Normale in B sind dann durch (Ia) und (IIa) gegeben. Seine Verschiebungen ξ_0 und η_0 in den Richtungen der Achsen x und y sind daher

$$\xi_0 = \xi_B \cos\delta - \eta_B \sin\delta\,, \qquad \eta_0 = \xi_B \sin\delta + \eta_B \cos\delta\,,$$

also wenn δ so klein bleibt, daß auch $\sin\delta = \delta$ und $\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$ hinreichend genau gelten, wegen $\lambda = \chi - \delta$,

$$\left.\begin{aligned}
\xi_{0\,I} &= \frac{P}{2\pi G} \cdot \left\{\begin{aligned}&\frac{m-2}{2m}(\mp\pi) \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{m-1}{m}\,\delta \cdot \ln[(R\chi - R\delta)^2] + \frac{5m-4}{2m} \cdot \chi \\ &- \left[\frac{3m-4}{8(m-1)} \ln(R^2) + \frac{7m^2-12m+8}{8m(m-1)}\right] \cdot \delta\end{aligned}\right\} \\
\eta_{0\,I} &= \frac{P}{2\pi G} \cdot \left\{\begin{aligned}&-\frac{m-1}{m} \ln[(R\chi - R\delta)^2] \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{m-2}{2m}(\mp\pi) \cdot \delta \\ &+ \frac{19m-7}{12m} \cdot \chi^2 - \frac{4m+5}{6m} \cdot \chi\,\delta + A + B \cdot \delta\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(Ib)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_{0\,II} &= \frac{K}{2\pi G} \cdot \left\{\begin{aligned}&-\frac{m-1}{m} \ln[(R\chi - R\delta)^2] \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{m-2}{2m}(\mp\pi) \cdot \delta - \frac{11m+1}{12m} \cdot \chi^2 \\ &+ \frac{8m-5}{6m} \cdot \chi\,\delta + \left[\frac{3m-4}{8(m-1)} \ln(R^2) + \frac{3m}{8(m-1)}\right] \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) - \frac{5m-11}{12m} \cdot \delta^2\end{aligned}\right\} \\
\eta_{0\,II} &= \frac{K}{2\pi G} \cdot \left\{-\frac{m-2}{2m}(\mp\pi) \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) - \frac{m-1}{m}\,\delta \cdot \ln[(R\chi - R\delta)^2] + \frac{m+2}{2m} \cdot \chi + C \cdot \delta\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IIb)}.$$

Darin sind A, B und C Konstanten, auf deren Wert es im folgenden nicht ankommt. Von einer Verschiebung der starren Scheibe, also einer Translation und einer Drehung, ist

wieder abgesehen. Von den Doppelvorzeichen von π gilt das obere für $\chi - \delta > 0$, das untere für $\chi - \delta < 0$.

III. Die Integralgleichungen des Problems.

6. Randverschiebungen in und nahe der Druckfläche infolge von Deformation durch eine verteilte Belastung. Zur Anwendung des Ergebnisses aus dem vorigen Abschnitt auf die Untersuchung der Vorgänge beim elastischen Rollen möge nun das bisher benutzte Koordinatensystem x, y so gelegt werden, daß der Berührungspunkt der Querschnitte der nicht deformierten Scheiben im Ursprung liegt, die x-Achse also gemeinsame Tangente und die y-Achse Zentrale ist. Die Betrachtung möge zunächst auf die Scheibe auf der Seite der positiven y beschränkt werden. An die Stelle des einen durch den Winkel δ bezeichneten Belastungspunktes B tritt jetzt eine Druckfläche, deren Punkte durch den variablen Winkel δ hinreichend bestimmt sind. Für die Grenzen der Fläche sei $\delta = \delta_u$ bzw. $\delta = \delta_0$ (Abb. 7). Die in der Druckfläche wirkende verteilte Belastung denke man sich entsprechend den Festsetzungen auf S. 29 (Abb. 1) in eine Verteilung von Druckspannungen $p(\delta)$ und eine Verteilung von Tangentialspannungen $t(\delta) = \mu(\delta) \cdot p(\delta)$ zerlegt.

Nun kann man die Ausdrücke in den geschweiften Klammern auf den rechten Seiten der Gl. (I b) und (II b) als Einflußfunktionen in den Veränderlichen χ und δ ansehen, zu welchen die Belegungsfunktionen $\frac{1}{2\pi G} \cdot R\,p(\delta)$ bzw. $\frac{1}{2\pi G} \cdot R\,t(\delta)$ gehören. Bei Gültigkeit eines linearen Superpositionsgesetzes würden also die Verschiebungen eines Punktes $A(\chi)$, abgesehen von Verschiebungen der starren Scheibe, bei hinreichend kleinen Beträgen von χ, δ_u und δ_0, wenn die vier Klammerausdrücke in (I b) und (II b) der Reihe nach mit $A_1(\delta, \chi)$, $B_1(\delta, \chi)$, $A_2(\delta, \chi)$, $B_2(\delta, \chi)$ bezeichnet werden, durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{R}{2\pi G}\int_{\delta_u}^{\delta_0} [A_1(\delta,\chi)\,p(\delta) + A_2(\delta,\chi)\,t(\delta)]\,d\delta \\ \bar{\eta} &= \frac{R}{2\pi G}\int_{\delta_u}^{\delta_0} [B_1(\delta,\chi)\,p(\delta) + B_2(\delta,\chi)\,t(\delta)]\,d\delta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

dargestellt. Das lineare Superpositionsgesetz kann aber in dem Maße nicht als gültig betrachtet werden, wie infolge der Deformation in der Druckfläche (die Krümmung der Oberflächen kann sich um einen Betrag von der Größenordnung $1/R$ ändern) die Angriffsstellen der Spannungen sich verschieben und die Normalenrichtungen in ihnen sich drehen. Der Fehler, der in den Gl. (16) dadurch enthalten ist, wird etwa von der Größenordnung sein wie die Aenderungen, welche bei der Koordinatentransformation von S. 36 auf die Drehung des Koordinatensystems um den Winkel δ zurückzuführen sind. Soweit also im folgenden die diesen Aenderungen entsprechenden Glieder nicht vernachlässigt werden können, sind sie als eine Abschätzung dafür zu betrachten, wie weit die aus den Gl. (16) hergeleiteten Ergebnisse von der Richtigkeit abweichen.

Es werden die Abkürzungen

$$a = R \cdot \frac{\delta_0 + \delta_u}{2}, \quad b = R \cdot \frac{\delta_0 - \delta_u}{2}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \varphi = \frac{R \cdot \chi - a}{b}, \quad \zeta = \frac{R\delta - a}{b} \quad (17)$$

eingeführt, so daß b die halbe Breite der Druckfläche und a die auf dem Kreisbogen gemessene Entfernung ihrer Mittellinie vom Koordinatenanfang 0 bedeuten, während φ und ζ dimensionslose Koordinaten anstelle von χ und δ sind, welche für δ_u, $\frac{\delta_0 + \delta_u}{2}$, δ_0 bzw. die Werte -1, 0, $+1$ annehmen. Die aus $p(\delta)$ und $t(\delta)$ durch die Transformation (17) hervorgehenden Funktionen von ζ seien mit $p(\zeta)$ und $t(\zeta)$ bezeichnet. Damit ergeben sich aus Gl. (16) zwei recht umfangreiche Formeln, die jedoch die Zulässigkeit erheblicher Vereinfachungen für praktisch vorkommende Fälle erkennen lassen, in denen man im allgemeinen zu dem Reibungskoeffizienten $\mu(\zeta)$ den Wert b/R so klein annehmen darf, daß $\left(\frac{b}{R}\right)^2$ gegenüber 1 und $b/R\,(\alpha + \zeta) \cdot t(\zeta)$ gegenüber $p(\zeta)$ vernachlässigt werden kann. Mit diesen Vereinfachungen erhält man aus (16) und (17):

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi} &= \frac{b}{2\pi G}\cdot\int_{-1}^{+1}\left\{-\frac{m-1}{m}\ln(\varphi-\zeta)^2\cdot t(\zeta)+\left[\frac{m-1}{m}\frac{b}{R}(\alpha+\zeta)\ln(\varphi-\zeta)^2\right.\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.\left.\mp\frac{m-2}{2m}\pi+\frac{5m-4}{2m}\cdot\frac{b}{R}\varphi\right]\cdot p(\zeta)\right\}d\zeta+A'\\ \bar{\eta} &= \frac{b}{2\pi G}\cdot\int_{-1}^{+1}\left\{\left[-\frac{m-1}{m}\ln(\varphi-\zeta)^2\mp\frac{m-2}{2m}\pi\frac{b}{R}(\alpha+\zeta)\right]\cdot p(\zeta)\right.\\ &\qquad\left.+\left[\pm\frac{m-2}{2m}\pi+\frac{m+2}{2m}\frac{b}{R}\varphi\right]\cdot t(\zeta)\right\}d\zeta+B'\end{aligned}\right\}\quad(18),$$

wobei in A' und B' die von φ unabhängigen Teile zusammengefaßt sind, nämlich

$$\left.\begin{aligned}A' &= \frac{b}{2\pi G}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{5m-4}{2m}\cdot\frac{b}{R}\alpha\cdot p(\zeta)\right.\\ &\qquad+\left[-\frac{m-1}{m}\ln(b^2)+\frac{3m-4}{8(m-1)}\ln(R^2)+\frac{3m}{8(m-1)}\right]\cdot t(\zeta)\\ &\qquad\left.+\left[\frac{m-1}{m}\ln(b^2)-\frac{3m-4}{8(m-1)}\ln(R^2)-\frac{7m^2-12m+8}{8m(m-1)}\right]\frac{b}{R}(\alpha+\zeta)\cdot p(\zeta)\right\}d\zeta\\ B' &= \frac{b}{2\pi G}\int_{-1}^{1}\left\{\left[-\frac{m-1}{m}\ln b^2+A\right]p(\zeta)+\frac{m+2}{2m}\cdot\frac{b}{R}\alpha\cdot t(\zeta)\right\}d\zeta\end{aligned}\right\}\quad(18').$$

Dabei gilt das obere oder untere der Doppelvorzeichen, je nachdem $\zeta\lessgtr\varphi$ ist.

7. Zusätzliche Verschiebungen der starren Scheibe. Wenn das Koordinatensystem x, y auch nach vollendeter Deformation noch die Eigenschaft besitzen soll, daß seine y-Achse die beiden Scheibenachsen schneiden soll, so sind dadurch alle Verschiebungen der starren Scheibe, welche den durch Gl (18) dargestellten noch zu überlagern sind, bis auf eine Translation parallel zur y Achse eindeutig festgelegt. Denn die beiden Bedingungen, welchen die Lage der y-Achse entsprechen soll, lassen sich bei Betrachtung des Querschnitts nur einer Scheibe dahin formulieren, daß sein Mittelpunkt C auf der y-Achse liegen bleiben und der Randpunkt A_0, welcher auf die Mittellinie der Druckfläche zu liegen kommt, seinen ursprünglichen Abstand ($\sim a=\alpha\cdot b$) von der y-Achse beibehalten soll. Die zu überlagernden Verschiebungen können also zerlegt werden in eine Translation ξ_{A_0} parallel zur x-Achse, welche den Punkt A_0 in die gewünschte Lage führt, und eine darauffolgende Drehung um A_0, welche den Punkt C auf die y-Achse bringt.

Der Wert von ξ_{A_0} läßt sich aus (18) darstellen. Er ist $\xi_{A_0}=-\xi$ für $\varphi=0$. Zur Bestimmung der erforderlichen Drehung werde zunächst die Verschiebung ξ des Punktes C ermittelt, die den durch (18) gegebenen Verschiebungen des Randes entspricht. Man muß dazu auf die im Scheibeninnern gültigen Gl (I) und (II) (In Nr. **3** und **4**) zurückgehen und sie auf einen Kreis um C mit geeignetem Radius r_W anwenden, der nach Nr. **5** als Querschnitt einer Welle zu denken ist. Die dadurch gegebenen Verschiebungen des Wellenrandes werden allerdings zusammen mit den dazugehörigen Spannungen nicht genau einem im Welleninnern möglichen stetigen Zustande entsprechen, und ohne diesen zu kennen, wird man auch die Verschiebungen der Wellenachse (ξ_W, η_W) nicht angeben können. Zur Abschätzung von ξ_W mag es jedoch genügen, dafür den Mittelwert der Verschiebungen des Wellenrandes parallel zur x-Achse zu setzen. Diesen kann man folgendermaßen finden:

Für Belastungsfall I (Normalkraft P in 0, Abb. 7) sind nach Gl. (I) die Mittelwerte der Verschiebungen des Wellenrandes ($r=r_W$) $\xi_m=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{2\pi}^{0}\zeta_I\cdot d\vartheta=0$ wegen Symmetrie zur y-Achse,

$$\eta_m=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{0}^{2\pi}\eta_I\cdot d\vartheta=\frac{P}{2\pi G}\cdot\left\{-\frac{m-1}{m}\ln(R^2)+\frac{3m-4}{8(m-1)}\ln(r_W^2)+\frac{m}{8(m-1)}\right\},$$

wenn man r_W so klein wählt, daß $\left(\frac{r_W}{R}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigbar ist, also etwa $r_W<0{,}1\,R$.

Greift P in B an, so ist also $\xi_{m_0} = -\eta_{mB} \sin\delta = -\eta_m \frac{b}{R}(\alpha+\zeta)$, und bei Verteilung der Belastung über die Druckfläche

$$\xi_{WN} = -\frac{b}{2\pi G}\cdot\int_{-1}^{+1}\left[-\frac{m-1}{m}\ln(R^2)+\frac{3m-4}{8(m-1)}\ln(rw^2)+\frac{m}{8(m-1)}\right]\cdot\frac{b}{R}(\alpha+\zeta)p(\zeta)\,d\zeta.$$

Entsprechend gilt für Belastungsfall II nach Gl. (11)

$$\xi_m = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\xi_{II}\,d\vartheta = \frac{K}{2\pi G}\cdot\left\{-\frac{m-1}{m}\ln(R^2)+\frac{3m-4}{8(m-1)}\ln(rw^2)-\frac{7m-8}{8(m-1)}\right\}$$

$$\eta_m = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\eta_{II}\cdot d\vartheta = 0.$$

Da jetzt $\xi_{m_0} = \xi_{mB}\cos\delta = \xi_m$ ist, wird mit der Abkürzung $T = \int_{-1}^{+1} b\cdot t(\zeta)\,d\zeta$

$$\xi_{WT} = \frac{T}{2\pi G}\left[-\frac{m-1}{m}\ln(R^2)+\frac{3m-4}{8(m-1)}\ln(rw^2)-\frac{7m-8}{8(m-1)}\right].$$

Nun hat man $\xi_W = \xi_{WN} + \xi_{WT}$

Der Wert von η_W könnte ebenso abgeschätzt werden. Sind jedoch alle Verschiebungen klein gegen R, so kann man für den Winkel i, um den die zusätzliche Drehung der starren Scheibe in positivem Sinne zu erfolgen hat, $i = \frac{\xi_W + \xi_{A_0}}{R}$ setzen (Abb. 8). Also ist

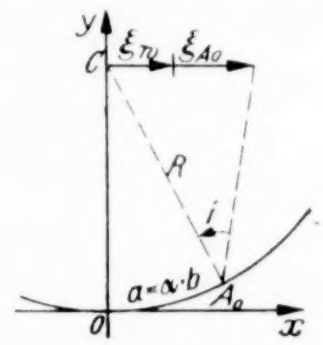


Abb. 8.

$$i = \frac{1}{R}\cdot\left\{\begin{aligned}&\frac{b}{2\pi G}\cdot\left[\int_{-1}^{+1}\frac{m-1}{m}\ln(\zeta^2)\cdot t(\zeta)\,d\zeta - \int_{-1}^{+1}\left(\frac{m-1}{m}\frac{b}{R}(\alpha+\zeta)\ln(\zeta^2)\mp\frac{m-2}{2m}\pi+\frac{5m-4}{2m}\cdot\frac{b}{R}\alpha\right)\cdot p(\zeta)\,d\zeta\right]\\ &-\frac{b}{2\pi G}\cdot\int_{-1}^{+1}\left[\frac{m-1}{m}\ln\left(\frac{b^2}{R^2}\right)+\frac{3m-4}{8(m-1)}\ln\left(\frac{rw^2}{R^2}\right)-\frac{3m^2-6m+4}{4m(m-1)}\right]\frac{b}{R}(\alpha+\zeta)\cdot p(\zeta)\,d\zeta\\ &+\frac{T}{2\pi G}\cdot\left[\frac{m-1}{m}\ln\left(\frac{b^2}{R^2}\right)+\frac{3m-4}{8(m-1)}\ln\left(\frac{rw^2}{R^2}\right)-\frac{5m-4}{4(m-1)}\right]\end{aligned}\right\}$$

Die mit dieser Drehung verbundenen zusätzlichen Verschiebungen der Randpunkte der Scheibe in und nahe der Druckfläche werden nun durch

$$\xi_D = 0 \quad \text{und} \quad \eta_D = i\cdot b\cdot\varphi$$

hinreichend genau berücksichtigt, so daß man für die gesamten Verschiebungen der Punkte an Stelle von Gl. (18) zu setzen hat

$$\xi(\varphi) = \bar{\xi}, \qquad \eta(\varphi) = \bar{\eta} + i\,b\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

8. Aufstellung der Integralgleichungen. Auf Grund der Festsetzungen über das benutzte Koordinatensystem x, y kann dieses bei Anwendung der Gleichungen (19) auf die treibende (1) oder getriebene (2) Scheibe mit den durch Abb. 2 eingeführten Systemen x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 identifiziert werden und die Verschiebungen der Randpunkte der beiden Scheiben nahe der Druckfläche werden in diesen Systemen durch (19) dargestellt, wenn man darin allen Zeichen entsprechend den Index »1« oder »2« anfügt. Da nun $x_1 = x_2$ und die Druckfläche auch Berührungsfläche ist, so kann man $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ und $b_1 = b_2 = b$ beibehalten. Setzt man fest, daß die positive x-Achse der Bewegungsrichtung der Randpunkte von Scheibe (1) in der Druckfläche entgegengesetzt gerichtet ist, wie dies die Abb. 1 und Abb. 2 darstellen, so ist mit Rücksicht auf die Wechselwirkung der Spannungen in der Druckfläche $p_1(\zeta) = p_2(\zeta) = p(\zeta)$ und

$t_1(\zeta) = -t_2(\zeta) = t(\zeta)$ zu setzen. Schließlich sei $m_1 = m_2 = m$ angenommen. Damit findet man [1])

$$\left.\begin{aligned}
\xi_2 - \xi_1 = \frac{b}{2\pi}\cdot\int_{-1}^{+1}\Bigg\{&\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right)\ln(\varphi-\zeta)^2\cdot t(\zeta)+\frac{5m-4}{2m}\left(\frac{1}{G_1 R_1}-\frac{1}{G_2 R_2}\right)b\varphi\cdot p(\zeta)\\
&-\left[\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{G_1 R_1}-\frac{1}{G_2 R_2}\right)b(\alpha+\zeta)\ln(\varphi-\zeta)^2\mp\frac{m-2}{2m}\pi\left(\frac{1}{G_1}-\frac{1}{G_2}\right)\right]\cdot p(\zeta)\Bigg\}d\zeta + A''\\
\eta_1+\eta_2 = \frac{b}{2\pi}\cdot\int_{-1}^{+1}\Bigg\{&\left[-\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right)\ln(\varphi-\zeta)^2\mp\frac{m-2}{2m}\pi\left(\frac{1}{G_1 R_1}+\frac{1}{G_2 R_2}\right)b(\alpha+\zeta)\right]\cdot p(\zeta)\\
&+\left[\pm\frac{m-2}{2m}\pi\left(\frac{1}{G_1}-\frac{1}{G_2}\right)-\frac{m+2}{2m}\left(\frac{1}{G_1 R_1}-\frac{1}{G_2 R_2}\right)b\cdot\varphi\right]\cdot t(\zeta)\Bigg\}d\zeta\\
&+(i_1+i_2)\,b\cdot\varphi+B''
\end{aligned}\right\} \quad (20).$$

Darin sind A'', B'' und $(i_1 + i_2)$ von φ unabhängig und es ist

$$\left.\begin{aligned}
i_1+i_2 = \frac{b}{2\pi}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\int_{-1}^{+1}&\left[\left(\frac{1}{G_1 R_1}-\frac{1}{G_2 R_2}\right)\ln(\zeta^2)\cdot t(\zeta)-\left(\frac{1}{G_1 R_1^2}+\frac{1}{G_2 R_2^2}\right)\ln(\zeta^2)\cdot b(\alpha+\zeta)\cdot p(\zeta)\right]d\zeta\\
&+\frac{m-2}{2m}\frac{b}{2}\left(\frac{1}{G_1 R_1}+\frac{1}{G_2 R_2}\right)\cdot\left[\int_{-1}^{0}p(\zeta)\,d\zeta-\int_{0}^{+1}p(\zeta)\,d\zeta\right]-\frac{b^2}{2\pi}\frac{5m-4}{2m}\left(\frac{1}{G_1 R_1^2}+\frac{1}{G_2 R_2^2}\right)\cdot\alpha\cdot\int_{-1}^{+1}p(\zeta)\,d\zeta\\
&-\frac{b^2}{2\pi}\cdot\left[\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{G_1 R_1^2}\ln\left(\frac{b^2}{R_1^2}\right)+\frac{1}{G_2 R_2^2}\ln\left(\frac{b^2}{R_2^2}\right)\right)-\frac{3m^2-6m+4}{4m(m-1)}\left(\frac{1}{G_1 R_1^2}+\frac{1}{G_2 R_2^2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{3m-4}{8(m-1)}\left(\frac{1}{G_1 R_1^2}\cdot\ln\left(\frac{r w_1^2}{R_1^2}\right)+\frac{1}{G_2 R_2^2}\cdot\ln\left(\frac{r w_2^2}{R_2^2}\right)\right)\right]\cdot\int_{-1}^{+1}(\alpha+\zeta)p(\zeta)\,d\zeta\\
&+\frac{T}{2\pi}\left[\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{G_1 R_1}\ln\left(\frac{b^2}{R_1^2}\right)-\frac{1}{G_2 R_2}\ln\left(\frac{b^2}{R_2^2}\right)\right)+\frac{3m-4}{8(m-1)}\left(\frac{1}{G_1 R_1}\ln\left(\frac{r w_1^2}{R_1^2}\right)-\frac{1}{G_2 R_2}\ln\left(\frac{r w_2^2}{R_2^2}\right)\right)\right.\\
&\left.-\frac{5m-4}{4(m-1)}\left(\frac{1}{G_1 R_1}-\frac{1}{G_2 R_2}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (20\,\mathbf{a}).$$

$\eta_1 + \eta_2$ muß nun bis auf eine Konstante der Randbedingung (4) genügen. Da nach Abb. 12 näherungsweise $x = R\cdot\sin\chi = R\cdot\chi$, also nach Gl. (17) $x = b(\alpha+\varphi)$ gesetzt werden darf, gilt also

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d(\eta_1+\eta_2)}{d\varphi} &= -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)b^2(\alpha+\varphi).\\
\text{Ferner ist nach Gl. (2)}\qquad&\\
\frac{d(\xi_2-\xi_1)}{d\varphi} &= \frac{d(\xi_2-\xi_1)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi} = s_\varepsilon\cdot b = b\cdot(s-s_y)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21).$$

Bei Ableitung der Integrale in (20) nach φ darf die Reihenfolge von Differentiation und Integration nicht ohne weiteres vertauscht werden, da sonst nicht konvergente uneigentliche Integrale entstehen würden. In

$$J(\varphi) = \int_{-1}^{+1} f(\zeta)\cdot\ln(\varphi-\zeta)^2\,d\zeta, \qquad (|\varphi|<1,\ |\zeta|\leqq 1)$$

sei $f(\zeta)$ eine stetige Funktion, welche im Innern des Intervalls $(-1, +1)$ eine stetige erste Ableitung hat. Um im Inneren desselben Intervalls die Ableitung $\frac{dJ}{d\varphi} = \lim_{\varphi_2\to\varphi_1}\frac{J_2-J_1}{\varphi_2-\varphi_1}$ zu bilden, wähle man zu φ_1 eine positive Zahl ε so, daß $0 < 2\varepsilon < (1-\varphi_1)\cdot(1+\varphi_1)$,

[1]) Die Theorie der Berührung elastischer Körper nach Hertz rechnet nur mit dem ersten der fünf Glieder von $(\eta_1+\eta_2)$, welches dem logarithmischen Potential einer durch $p(\zeta)$ gekennzeichneten Belegung der Oberfläche entspricht. Das zweite Glied gibt darüber hinaus in erster Annäherung (vergl. Nr. 6) über die Größenordnung des Einflusses Aufschluß, welchen die ja auch schon im Berührungsgebiet vorhandenen Abweichungen der Normalenrichtung von der Richtung der y-Achse auf die Verschiebungen haben und welcher etwa bei weich-elastischen Materialien von merklicher Größe sein könnte. Das dritte Glied bringt den Einfluß der Reibung in der Berührungsfläche zum Ausdruck und schließlich das vierte die durch die Reibung hervorgerufene einseitige Verschiebung der Berührungsfläche. Entsprechend können die Glieder von $\xi_2 - \xi_1$ gedeutet werden.

und weiter φ_2 so, daß $|\varphi_2 - \varphi_1| < \varepsilon$ ist. Dann liegt φ_2 im Intervall $(\varphi_1 - \varepsilon,\ \varphi_1 + \varepsilon)$, ferner hat der Integrand von J für ζ außerhalb der Intervalle $(\varphi_1 - \varepsilon,\ \varphi_1 + \varepsilon)$ und $(\varphi_2 - \varepsilon,\ \varphi_2 + \varepsilon)$, welche beide im Intervall $(-1,\ +1)$ liegen, eine stetige Ableitung nach φ. Aus der Zerlegung

$$J_1 = \int_{-1}^{+1} f(\zeta) \cdot \ln(\varphi_1 - \zeta)^2 \, d\zeta = \int_{-1}^{\varphi_1-\varepsilon} + \int_{\varphi_1-\varepsilon}^{\varphi_1+\varepsilon} + \int_{\varphi_1+\varepsilon}^{+1} \quad \text{und} \quad J_2 = \int_{-1}^{+1} f(\zeta) \cdot \ln(\varphi_2 - \zeta)^2 \, d\zeta = \int_{-1}^{\varphi_2-\varepsilon} + \int_{\varphi_2-\varepsilon}^{\varphi_2+\varepsilon} + \int_{\varphi_2+\varepsilon}^{+1}$$

kann also gefolgert werden

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\int_{-1}^{\varphi-\varepsilon} f(\zeta) \ln(\varphi - \zeta)^2 \, d\zeta + \frac{d}{d\varphi}\int_{\varphi+\varepsilon}^{+1} f(\zeta) \ln(\varphi - \zeta)^2 d\zeta + \lim_{\varphi_2 \to \varphi_1} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \ln(x^2) \frac{f(\varphi_2 + x) - f(\varphi_1 + x)}{\varphi_2 - \varphi_1} \, dx,$$

wenn man in den mittleren Integralen von J_1 und J_2 ζ durch $\varphi_1 + x$ bzw. $\varphi_2 + x$ ersetzt. Es ist daher

$$\frac{dJ}{d\varphi} = 2 \cdot \int_{-1}^{\varphi-\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\varphi - \zeta} \, d\zeta + 2 \cdot \int_{\varphi+\varepsilon}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\varphi - \zeta} \, d\zeta + f(\varphi - \varepsilon) \ln(\varepsilon^2) - f(\varphi + \varepsilon) \ln[(-\varepsilon)^2] + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f'(\varphi + x) \ln(x^2) \, dx.$$

Diese Ableitung $\frac{dJ}{d\varphi}$ muß natürlich unabhängig von der beschränkt willkürlichen Wahl von ε sein, und ihre Differentiation nach ε liefert in der Tat den Wert Null. Man kann also versuchen, mit ε selbst sich der Grenze Null zu nähern, und findet

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [f(\varphi - \varepsilon) \ln(\varepsilon^2) - f(\varphi + \varepsilon) \ln([-\varepsilon]^2)] = \lim_{\varepsilon \to 0} 2 \cdot [\varepsilon \ln(\varepsilon^2)] \cdot \left[\frac{f(\varphi - \varepsilon) - f(\varphi + \varepsilon)}{2\varepsilon}\right]$$
$$= -f'(\varphi) \cdot 4 \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \cdot \ln \varepsilon) = 0,$$

ferner

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f'(\varphi + x) \ln(x^2) \, dx = 0.$$

Demnach ist der Grenzwert

$$2 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{\varphi-\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\varphi - \zeta} \, d\zeta + \int_{\varphi+\varepsilon}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\varphi - \zeta} \, d\zeta\right],$$

der als Cauchyscher Hauptwert des Integrals $2 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\varphi - \zeta} \, d\zeta$ bekannt ist, die gesuchte Ableitung und man darf schreiben:

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\int_{-1}^{+1} f(\zeta) \ln(\varphi - \zeta)^2 \, d\zeta = 2 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\varphi - \zeta} \, d\zeta \quad (-1 < \varphi < 1)$$

wenn das letzte uneigentliche Integral unter der Nebenbedingung gelöst wird, daß die Annäherung der inneren Grenzen an den Wert φ von rechts und links in derselben Weise erfolgt, und wenn die Ableitung von $f(\zeta)$ in der Umgebung von φ existiert und stetig ist.

Gemäß der Festsetzung über das Doppelvorzeichen (vergl. Nr. **6**) ist ferner

$$\int_{-1}^{+1} \pm g(\zeta) \, d\zeta = \int_{-1}^{\varphi} g(\zeta) \, d\zeta - \int_{\varphi}^{+1} g(\zeta) \, d\zeta,$$

also bei Stetigkeit von $g(\zeta)$

$$\frac{d}{d\varphi}\int_{-1}^{+1} \pm g(\zeta) \, d\zeta = 2 \cdot g(\varphi).$$

Durch Einsetzen der so gewonnenen Ableitungen der Gl. (20) in die Gl. (21) findet man die zwei Integralgleichungen für die unbekannten Funktionen $p(\varphi)$ und $t(\varphi)$[1]:

[1]) Man überzeugt sich leicht, daß die Gleichungen (III) und (IV) auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn die ersten Ableitungen von $p(\varphi)$ oder $t(\varphi)$ eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen im Integrationsintervall $\langle -1,\ +1 \rangle$ enthalten.

$$\left.\begin{aligned}(s-s_g) &= \frac{m-1}{\pi\, m}\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right)\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{t(\zeta)}{\varphi-\zeta}\,d\zeta-\frac{m-1}{\pi\, m}\left(\frac{1}{G_1 R_1}-\frac{1}{G_2 R_2}\right)b\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{\alpha+\zeta}{\varphi-\zeta}\,p(\zeta)\,d\zeta\\ &+\frac{m-2}{2\,m}\left(\frac{1}{G_1}-\frac{1}{G_2}\right)\cdot p(\varphi)-\frac{5\,m-4}{4\,\pi\, m}\cdot\left(\frac{1}{G_1 R_1}-\frac{1}{G_2 R_2}\right)b\cdot\int_{-1}^{+1}p(\zeta)\,d\zeta\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}$$

und

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)b(\alpha+\varphi)+(i_1+i_2) &= \frac{m-1}{\pi\, m}\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right)\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{p(\zeta)}{\varphi-\zeta}\,d\zeta+\frac{m-2}{2\,m}\left(\frac{1}{G_1 R_1}+\frac{1}{G_2 R_2}\right)b(\alpha+\varphi)\cdot p(\varphi)\\ &-\frac{m-2}{2\,m}\left(\frac{1}{G_1}-\frac{1}{G_2}\right)\cdot t(\varphi)-\frac{m+2}{4\,\pi\, m}\left(\frac{1}{G_1 R_1}-\frac{1}{G_2 R_2}\right)b\cdot\int_{-1}^{+1}t(\zeta)\,d\zeta\end{aligned}\right\}\quad\text{(IV).}$$

Diese Gleichungen enthalten noch s_g als unbekannte Funktion von φ. Die erforderliche dritte Relation liefert das Reibungsgesetz, welches durch die Randbedingung (3) zum Ausdruck gebracht wird.

Zur Bestimmung der unbekannten Konstanten wird schließlich noch die dritte Randbedingung (5) in der Form

$$b\cdot\int_{-1}^{+1}p(\varphi)\,d\varphi=N\,,\qquad b\cdot\int_{-1}^{+1}t(\varphi)\,d\varphi=T\quad\text{(5a)}$$

benutzt, worin N und T die auf die Längeneinheit der Scheiben entfallenden Anteile der Normal- bzw. Tangentialkraft bedeuten.

9. Eine Lösung für den Fall gleicher Schubmoduln. Haben die Materialien der beiden Scheiben denselben Schubmodul ($G_1=G_2=G$), so kann eine Lösung angegeben werden, wenn man $\frac{m-2}{2\,m}\cdot\frac{p(\varphi)}{G}$ gegenüber 1 vernachlässigen darf, was bei Metallen stets der Fall ist. Mit der Abkürzung

$$(i_1+i_2)+\frac{m+2}{4\,\pi\, m\, G}\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\cdot T+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot b\,\alpha=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot b\,\varphi_0\quad\text{(22)}$$

entsteht dann aus (IV) die lineare Integralgleichung erster Art für $p(\varphi)$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{p(\zeta)}{\varphi-\zeta}\,d\zeta=\frac{\pi\, m\, G}{2\,(m-1)}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot b\,(\varphi+\varphi_0)\,,$$

welche eine Unabhängigkeit der Lösung für $p(\varphi)$ von der Funktion der Reibungsspannungen $t(\varphi)$ erkennen läßt. Es gilt also bei Gleichheit der Schubmoduln die aus der Hertzschen Theorie der reibungsfreien Berührung bekannte Lösung $p(\varphi)=p_0\sqrt{1-\varphi^2}$, in der p_0 eine Konstante bedeutet, auch bei Existenz von Reibung in der Berührungsfläche, solange die früher eingeführten und auch in der Hertzschen Theorie enthaltenen Vernachlässigungen als zulässig angesehen werden können. Die Ausführung der Integration liefert bekanntlich als Cauchyschen Hauptwert

$$\int_{-1}^{+1}\frac{p(\zeta)}{\varphi-\zeta}\,d\zeta=p_0\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\varphi-\zeta}\,d\zeta=p_0\,\pi\,\varphi\,,\qquad |\varphi|\leqq 1\,,$$

womit die Lösung verifiziert ist. Man findet daraus

$$\left.\begin{aligned}p_0=\frac{m\,G}{2\,(m-1)}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)b\ \text{und}\ \varphi_0=0\,,\quad N=b\cdot\int_{-1}^{+1}p(\varphi)\,d\varphi=b\,p_0\cdot\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\varphi^2}\,d\varphi=b\,p_0\,\frac{\pi}{2}\\ p_0=\sqrt{\frac{m\,G}{m-1}\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{N}{\pi}}\,,\qquad b=\sqrt{\frac{m-1}{m\,G}\cdot\frac{4}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\cdot\frac{N}{\pi}}\end{aligned}\right\}\quad\text{(23).}$$

Weil ferner

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\alpha+\zeta}{\varphi-\zeta} p(\zeta)\, d\zeta = p_0 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha+\zeta}{\varphi-\zeta} \cdot \sqrt{1-\zeta^2}\, d\zeta = p_0 \pi \cdot \left(\varphi^2 + \alpha\varphi - \frac{1}{2}\right) \quad . \quad (24)$$

ist, so erhält (III) die Form

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{t(\zeta)}{\varphi-\zeta} d\zeta = \frac{m G}{m-1} (s - s_g) + \left[\varphi^2 + \alpha\varphi + \frac{m}{8(m-1)}\right] \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot b\, p_0 \quad (25).$$

In Anlehnung an die Reynoldsschen Beobachtungen sei nun die Annahme gemacht, daß höchstens eine Dreiteilung der Berührungsfläche stattfinden kann, daß im Gleitgebiet überall $s_g > 0$ ist und daß ein Gleitgebiet stets am Rande der Berührungsfläche liegt. Bedeuten γ_1 und γ_2 die Abszissen für die Grenzen zwischen zwei Gebieten, so erhält die Randbedingung (3) die Form:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{für } -1 \leqq \varphi < \gamma_1 & s_g > 0 & t(\varphi) = \mu_0 \cdot p(\varphi) & \\ \text{» } \gamma_1 \leqq \varphi \leqq \gamma_2 & s_g = 0 & t(\varphi) = \mu(\varphi) \cdot p(\varphi) & [|\mu(\varphi)| \leqq \mu_0] \\ \text{» } \gamma_2 < \varphi \leqq +1 & s_g > 0 & t(\varphi) = \mu_0 \cdot p(\varphi) & \end{array}\right\} (-1 \leqq \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq +1) \quad (3\,a).$$

Sie enthält für $(-1 < \gamma_1 < \gamma_2 < +1)$ die Reynoldssche Beobachtung.

Zur Lösung der Gl. (25) setze man darin $t(\varphi) = \mu_0 \cdot p(\varphi) - u(\varphi)$, so daß $u(\varphi)$ außerhalb des Intervalls (γ_1, γ_2) Null ist, also

$$\int_{-1}^{+1} \frac{t(\zeta)}{\varphi-\zeta} d\zeta = \mu_0 p_0 \pi \varphi - \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{u(\zeta)}{\varphi-\zeta} d\zeta .$$

Dann ist

$$U(\varphi) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{u(\zeta)}{\varphi-\zeta} d\zeta = \left[-\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) b\, p_0 \frac{\pi}{2}\right] \cdot \varphi^2 + \left[\mu_0 p_0 \pi - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) b\, p_0 \frac{\pi}{2} \alpha\right] \cdot \varphi$$
$$- \frac{\pi\, m\, G}{2(m-1)} \cdot \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{b\, p_0}{8\, G} + (s - s_g)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Für $s_g = 0$ steht rechts eine quadratische Funktion von φ; ein Blick auf Gl. (24) legt also einen Ansatz zur Lösung für $u(\varphi)$ im Haftgebiet nahe.

Durch die Substitutionen

$$\chi = -\frac{\gamma_2 + \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{2}{\gamma_2 - \gamma_1} \cdot \zeta , \qquad \psi = -\frac{\gamma_2 + \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{2}{\gamma_2 - \gamma_1} \cdot \varphi$$

erhält das Haftgebiet die Grenzen $\chi = -1$ und $\chi = +1$, bzw. $\psi = -1$ und $\psi = +1$ und mit dem Ansatz

$$u(\zeta) = \mu_0 p_0 \cdot f(\chi) = \mu_0 p_0 (f_0 + f_1 \cdot \chi) \cdot \sqrt{1-\chi^2}$$

findet man

$$U(\varphi) = \int_{\zeta=\gamma_1}^{\zeta=\gamma_2} \frac{u(\zeta)}{\varphi-\zeta} d\zeta = \mu_0 p_0 \cdot \int_{\chi=-1}^{\chi=+1} \frac{(f_0 + f_1 \cdot \chi) \cdot \sqrt{1-\chi^2}}{\psi-\chi} d\chi = \mu_0 p_0 (f_0 + f_1 \psi) \cdot \pi \psi$$
$$- \mu_0 p_0 f_1 \cdot \frac{\pi}{2} - \mu_0 p_0 (f_0 + f_1 \cdot \psi) \cdot (\psi^2 - 1) \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{d\chi}{(\psi-\chi) \cdot \sqrt{1-\chi^2}} \quad (27).$$

Das letzte Integral $J = \int_{-1}^{+1} \frac{d\chi}{(\psi-\chi)\cdot\sqrt{1-\chi^2}}$ hat nun folgende Werte:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{für } -1 \leqq \varphi < \gamma_1 , & \text{also} & \psi < -1 , & J_- = -\dfrac{\pi}{\sqrt{\psi^2-1}} \\ \text{» } \gamma_1 \leqq \varphi \leqq \gamma_2 , & \text{» } & -1 \leqq \psi \leqq +1 , & J_0 = 0 \\ \text{» } \gamma_2 < \varphi \leqq +1 , & \text{» } & \psi > +1 , & J_+ = +\dfrac{\pi}{\sqrt{\psi^2-1}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (27\,a),$$

wenn $\sqrt{\psi_2 - 1}$ dasselbe Vorzeichen erhält wie $\sqrt{1-\chi^2}$, welches ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit der Betrachtungen positiv gewählt werden konnte. Die im Haftgebiet gültige Funktion U_0 ist demnach in ψ, also auch in φ quadratisch und aus dem Vergleich

der Koeffizienten mit denen in $U(\varphi)$ nach (26) für $s_\varphi = 0$ folgt, wenn man zur Abkürzung $\beta = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{b}{\mu_0}$ einführt,

$$f_0 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \cdot \left[1 - \beta \cdot \frac{\gamma_2 + \gamma_1 + \alpha}{2}\right], \qquad f_1 = -\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \cdot \left[\beta \cdot \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{4}\right] \quad . \quad . \quad (28\,\mathbf{a})$$

$$s = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\mu_0\, p_0}{G} \cdot \left[(\gamma_2 + \gamma_1) - \beta \left\{\frac{m}{8\,(m-1)} + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{8} + \frac{\gamma_2 + \gamma_1}{2}\left(\frac{\gamma_2 + \gamma_1}{2} + \alpha\right)\right\}\right] \quad (28\,\mathbf{b}).$$

Daraus ergibt sich weiter wegen

$$t(\varphi) = \mu_0\, \boldsymbol{p}(\mathfrak{q}) - u(\mathfrak{q}) = \mu_0\, p_0 \cdot [\sqrt{1 - \mathfrak{q}^2} - (f_0 + f_1 \cdot \psi) \cdot \sqrt{1 - \psi^2}]$$

im Haftgebiet und wegen

$$t(\mathfrak{q}) = \mu_0 \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \mathfrak{q}^2} \qquad \Big\} \quad . \quad . \quad (29)$$

im Gleitgebiet, daß

$$T = b \cdot \int_{-1}^{+1} t(\mathfrak{q})\, d\,\mathfrak{q} = \mu_0\, b\, p_0 \cdot \left[\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \mathfrak{q}^2}\, d\,\mathfrak{q} - \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} (f_0 + f_1 \cdot \psi) \cdot \sqrt{1 - \psi^2}\, d\,\zeta\right]$$

$$= \mu_0\, b\, p_0 \cdot \left[\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \mathfrak{q}^2}\, d\,\mathfrak{q} - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \cdot f_0 \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \psi^2}\, d\,\psi\right] = \mu_0\, N \cdot \left(1 - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} f_0\right),$$

also

$$\nu = \frac{T}{\mu_0\, N} = 1 - \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}\right)^2 \cdot \left[1 - \beta \cdot \frac{\gamma_2 + \gamma_1 + \alpha}{2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

ist.

Ein Wertepaar β, ν ist für einen bestimmten durch Normalkraft und Tangentialkraft gegebenen Belastungszustand charakteristisch[1]). Die Werte γ_1, γ_2 und α sind also zur Berechnung von s als Unbekannte zu eliminieren, wozu folgende Ueberlegungen dienen. Damit im Haftgebiet die Bedingung $|\mu(\zeta)| \leqq \mu_0$ erfüllt ist, muß

$$0 \leqq u(\zeta) \leqq 2\,\mu_0\, p_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

sein, oder

$$0 \leqq (f_0 + f_1\,\chi) \cdot \sqrt{1 - \chi^2} \leqq 2 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (|\chi| \leqq 1) \qquad \Big\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Dafür, daß $\mu(\zeta) \leqq \mu_0$ ist, ist also die Bedingung

$$f_0 \geqq |f_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31\,\mathbf{a})$$

notwendig und hinreichend; die Bedingung für $-\mu_0 \leqq \mu(\zeta)$ wird später näher untersucht. Ferner unterscheidet sich im Gleitgebiet das Integral $U(\varphi)$ von der Funktion U_0 nach (27) und (27a)

$$\text{für } \psi < -1 \text{ um } U_- - U_0 = +\mu_0\, p_0\, \pi \cdot (f_0 + f_1 \cdot \psi) \cdot \sqrt{\psi^2 - 1}$$

$$\text{» } \psi > +1 \text{ » } U_+ - U_0 = -\mu_0\, p_0\, \pi \cdot (f_0 + f_1\,\psi) \cdot \sqrt{\psi^2 - 1},$$

während nach (26) für beliebige Werte von φ, also auch von ψ innerhalb der Berührungsfläche

$$U(\mathfrak{q}) - U_0 = +\frac{\pi\, m\, G}{2\,(m-1)}\, s_\varphi \geqq 0$$

zu fordern ist. Zur Vermeidung eines Widerspruchs ist also neben der Bedingung (31a) mit Rücksicht auf ein rechtes Gleitgebiet ($\gamma_2 < \varphi \leqq 1$) die Alternative zu stellen, das entweder

$$f_0 + f_1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \gamma_2 = 1 \quad \text{ist} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Damit auch im linken Gleitgebiet ($-1 \leqq \varphi < \gamma_1$) überall $s_\varphi \geqq 0$ ist, muß noch gefordert werden, daß im Intervall $\left(-\frac{2 + \gamma_2 + \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \leqq \psi \leqq -1\right)$ der Wert $f_0 + f_1 \cdot \psi$ nicht negativ wird, also daß

$$f_0 - f_1 \cdot \frac{2 + \gamma_2 + \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \geqq 0 \quad \text{ist}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

---

[1]) Man könnte β »Belastungswert« und ν »Nutzungswert« nennen. Ein Betrag von β nahe 1 oder größer ist bei den vorausgesetzten Werten von $\frac{b}{R}$ nur bei sehr kleinen Werten von μ_0 möglich.

[2]) In ähnlicher Weise läßt sich der Beweis führen, daß die Funktion $p(\mathfrak{q}) = p_0 \cdot \sqrt{1 - \mathfrak{q}^2}$ die notwendige Bedingung erfüllt, daß sich die Scheiben im Berührungsgebiet berühren, außerhalb desselben aber einen Abstand voneinander behalten.

Eine vierte Bedingung folgt wegen $q_0 = 0$ [Gl. (23)] aus (22) und (20a). Setzt man zur Abkürzung

$$\int_{-1}^{+1} \ln(\zeta^2) \cdot p(\zeta)\, d\zeta = L_N \text{ [1]}; \qquad \int_{-1}^{+1} \ln(\zeta^2) \cdot t(\zeta)\, d\zeta = L_T,$$

$$\frac{m-1}{m} \cdot \left[\frac{1}{R_1^2} \ln\left(\frac{b}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{R_2^2} \ln\left(\frac{b}{R_2}\right)^2\right] + \frac{3m-4}{8(m-1)} \cdot \left[\frac{1}{R_1^2} \ln\left(\frac{r_{W1}}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{R_2^2} \ln\left(\frac{r_{W2}}{R_2}\right)^2\right] + \frac{13m^2 - 24m + 12}{4m(m-1)} \cdot \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) = k_N$$

$$\frac{m-1}{m} \cdot \left[\frac{1}{R_1} \ln\left(\frac{b}{R_1}\right)^2 - \frac{1}{R_2} \ln\left(\frac{b}{R_2}\right)^2\right] + \frac{3m-4}{8(m-1)} \cdot \left[\frac{1}{R_1} \ln\left(\frac{r_{W1}}{R_1}\right)^2 - \frac{1}{R_2} \ln\left(\frac{r_{W2}}{R_2}\right)^2\right] + \left(\frac{m+2}{2m} - \frac{5m-4}{4(m-1)}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = k_T,$$

so erhält man, da $p(q) = p_0 \cdot \sqrt{1-q^2}$ eine gerade Funktion ist,

$$\left.\begin{aligned} \left[k_N N - 2\pi G\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) b L_N\right] \cdot b\alpha \\ = k_T \cdot T + \frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot b L_T \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22a).$$

Gl. (22a) und die Alternative (32) würden nun zur Elimination der Unbekannten genügen; es sind dementsprechend Belastungsfälle möglich, für welche (31) und (33) einen Widerspruch mit den übrigen Bedingungen bringen, für welche also die Lösung mit dem gewählten Ansatz für $u(\zeta)$ versagt.

Die Elimination erscheint mit Hilfe von (22a) praktisch undurchführbar. Man darf aber in Gl. (28) und (30) unbedenklich $\alpha = 0$ setzen und Gl. (22a) lediglich zu einer bei Zahlenrechnung durchführbaren Kontrolle benutzen. Dies liegt nach der Betrachtung zweier Grenzfälle nahe: Ist die ganze Berührungsfläche Haftgebiet, so folgt wegen $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = +1$ aus (30) $T = \frac{\mu_0 N \cdot \beta}{2} \cdot \alpha$, was mit (22a) liefert: $T = 0$ und $\alpha = 0$. Ist die ganze Berührungsfläche Gleitgebiet, also $\gamma_1 = \gamma_2$, so ist nach (30) $T = \mu_0 \cdot N = T_{max}$ und aus (22a) ist die Größenordnung von α durch

$$\alpha = \frac{2{,}38}{4} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{\mu_0 p_0}{G}$$

gegeben, also stets einen kleinen Wert, der bei Metallen 0,001 kaum erreichen dürfte.

Aus Gl. (28a) folgt mit $\alpha = 0$ für die Alternative (32)

$$\gamma_2 = 1 \quad \ldots \quad (32a) \quad \text{oder} \quad \gamma_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{\beta} - \gamma_1\right) \quad \ldots \quad (32b),$$

und die weitere Untersuchung zeigt nun, daß (32b) unmöglich ist, solange $\beta < 1$ ist (also auch für beliebige negative Werte von β!), daß (32a) unmöglich ist, solange $\beta \geqq 2$ ist, und daß schließlich für $1 \leqq \beta < 2$ Gl (32b) oder (32a) unmöglich wird, je nachdem γ_1 kleiner oder größer als der »Uebergangswert« $\gamma_{\ddot{u}} = 4/\beta - 3$ ist. Damit ist auch γ_2 eindeutig eliminiert.

γ_1 wird zweckmäßig als Parameter anstelle von ν beibehalten. Für jeden Belastungswert β sind bei Wahl von γ_1 durch (32a, b) die Einteilung der Berührungsfläche festgelegt und durch (23), (28), (29) und (30) die zugehörige Spannungsverteilung, der Schlupf und der Nutzungswert bestimmt. In der freien Veränderlichkeit über das Intervall $\langle -1, +1 \rangle$ ist γ_1 aber für gewisse Werte von β beschränkt: Für $\beta > 1$ muß wegen (32b) $\gamma_1 \leqq 1/\beta$ sein, jedoch wird dadurch kein Belastungsfall von der Lösung ausgeschlossen, da für $\gamma_1 = 1/\beta$ auch $\gamma_2 = 1/\beta$ und $\nu = 1$ wird. Dagegen bringt die Bedingung $-\mu_0 \leqq \mu(\zeta)$ (31) die Einschränkung $\gamma_1 \geqq \gamma_g$, wobei γ_g ein Grenzwert ist, der für $|\beta| > 2$ größer als -1 ist [2]), und diese Einschränkung schließt eine Reihe von (allerdings prak-

[1]) Es ist $b \cdot L_N = -2{,}38\, N$, wie man sich leicht überzeugt.

[2]) Für $\beta < -2$ ist γ_g aus der Gleichung $\frac{1-\gamma_g}{2} \cdot \left(1 - \beta \cdot \frac{3+\gamma_g}{4}\right)^2 = 4$ zu berechnen, für $\beta > +2$ durch ein Näherungsverfahren.

tisch nicht herstellbaren) Belastungsfällen von der Lösung aus, da für $\gamma_1 = \gamma_g$ der Nutzungswert $\nu_g > 0$ ist und, wie sich leicht nachweisen läßt, ν im Bereich der Gültigkeit der Lösung stets und stetig mit γ_1 wächst. Solange $-\mu_0 \leq \mu(\zeta)$ erfüllt ist, gelten auch die Bedingungen (31a) und (33).

Der Umstand, daß die Lösung auf Grund der Bedingung (31) versagen kann, läßt vermuten, daß auch andere Einteilungen der Berührungsfläche als die hier behandelten zu einer Lösung führen können, z. B. eine solche mit einem Haftgebiet zwischen Gleitgebieten mit Gleitschlupfen verschiedenen Vorzeichens. Aber auch für die hier behandelte Einteilung können mehrere Lösungen möglich sein. Falls neben $p(\varphi) = p_0 \sqrt{1-\varphi^2}$ noch eine Lösung $p_1(\varphi)$ existiert, so muß $F(\varphi) = p_1(\varphi) - p_0\sqrt{1-\varphi^2}$ die Integralgleichung erster Art

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(\zeta)}{\varphi - \zeta}\, d\zeta = \frac{\pi\, m\, G}{2\,(m-1)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot b\, q_0$$

befriedigen und es bleibt zu untersuchen, ob der Unstetigkeitscharakter des Kernes $\frac{1}{\varphi - \zeta}$ die Eindeutigkeit der Lösung $F(\varphi) = 0$ auch angesichts der Tatsache zur Folge hat, daß die Konstante q_0 unbekannt ist[1]). Zu jeder Lösung für $p(\varphi)$ würde eine Integralgleichung für $t(\varphi)$ gehören, deren Mehrdeutigkeit in ähnlicher Weise untersucht werden kann. Existiert z. B. bei Gl (25) neben der Lösung $t(\varphi)$ aus dem Ansatz für $u(\zeta)$ eine andere Lösung $t_1(\varphi)$ mit der Hilfsfunktion $u_1(\zeta)$, so ist die Differenz $u_1(\zeta) - u(\zeta)$ hier einer ähnlichen Bedingung unterworfen, wie oben die Funktion $F(\varphi) = p_1(\varphi) - p_0\sqrt{1-\varphi^2}$; an die Stelle der unbekannten Konstanten q_0 tritt hier der gesuchte Schlupf s. In physikalischer Hinsicht liegt angesichts der Brauchbarkeit der Hertzschen Theorie für reibungsfreie Berührung die Vermutung nahe, daß die hier im Anschluß an die Hertzsche Theorie gefundene Lösung für den Fall gleicher Schubmoduln die physikalischen Beziehungen beim wesentlich elastischen Rollvorgange wenigstens qualitativ richtig darstellt.

10. Zur Lösung für den Fall verschiedener Schubmoduln. Für den Fall verschiedener Schubmoduln der beiden Scheiben lassen sich die beiden Integralgleichungen (III) und (IV) für die beiden Funktionen $p(\varphi)$ und $t(\varphi)$ in eine inhomogene lineare Integralgleichung zweiter Art für $p(\varphi)$ und eine Formel für $t(\varphi)$ umzuwandeln.

Setzt man zur Abkürzung für bekannte Werte

$$\frac{\frac{m-1}{\pi\, m} \cdot \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)}{\frac{m-2}{2\, m} \cdot \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)} = \lambda; \qquad \frac{m-2}{2\, m} \cdot \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right) = \frac{1}{D}$$

und für die wegen α unbekannte Konstante

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) b\, \alpha + (i_1 + i_2) + \frac{m+2}{4\,\pi\, m} \left(\frac{1}{G_1 R_1} - \frac{1}{G_2 R_2}\right) \cdot T = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) b \cdot q_1\,,$$

so erhält man nach teilweiser Ausführung der Integrationen aus Gl. (III)

$$p(\varphi) = D(s - s_g) - \lambda \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{t(\zeta)}{\varphi - \zeta}\, d\zeta + \frac{D}{4\,\pi} \left(\frac{1}{G_1 R_1} - \frac{1}{G_2 R_2}\right) N + D \cdot \frac{m-1}{\pi\, m} \left(\frac{1}{G_1 R_1} - \frac{1}{G_2 R_2}\right) b \cdot (\alpha + \varphi) \int_{-1}^{+1} \frac{p(\zeta)}{\varphi - \zeta}\, d\zeta$$

und aus Gl. (IV)

$$t(\varphi) = \lambda \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{p(\zeta)}{\varphi - \zeta}\, d\zeta - D\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) b\,(\varphi + \varphi_1) + D\,\frac{m-2}{2\, m} \left(\frac{1}{G_1 R_1} + \frac{1}{G_2 R_2}\right) b\,(\alpha + \varphi) \cdot p(\varphi).$$

[1]) Da man aus physikalischen Gründen $p_1(-1) = p_1(+1) = 0$, also auch $F(-1) = F(+1) = 0$ annehmen darf, so findet man durch partielle Integration und darauffolgende Ableitung nach φ, daß für die Ableitung $\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = f(\varphi)$ die Gleichung $\int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\varphi - \zeta}\, d\zeta = 0$ gelten muß.

Schreibt man in $t(q)$ x statt ζ und ζ statt q, setzt den Ausdruck für $t(\zeta)$ in den für $p(q)$ ein und benutzt die Abkürzungen

$$A = D \cdot \left[s - 2\lambda \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) b + \left(\frac{1}{G_1 R_1} - \frac{1}{G_2 R_2} \right) \cdot \frac{N}{4\pi} + \lambda \frac{m-2}{2m} \left(\frac{1}{G_1 R_1} + \frac{1}{G_2 R_2} \right) N \right],$$

$$B = D \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) b, \qquad C = \frac{b}{\lambda^2} \cdot D \left[\frac{m-1}{\pi m} \left(\frac{1}{G_1 R_1} - \frac{1}{G_2 R_2} \right) - \lambda \frac{m-2}{2m} \left(\frac{1}{G_1 R_1} + \frac{1}{G_2 R_2} \right) \right],$$

so daß B und C als bekannte, A wegen s als gesuchte Konstanten zu betrachten sind [1]), so erhält man

$$\left. \begin{aligned} p(q) = A - D \cdot s_g - \lambda^2 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{d\zeta}{q-\zeta} \int_{-1}^{+1} \frac{p(x)}{\zeta - x} dx + \lambda \cdot B (q + q_1) \cdot \ln \frac{1+q}{1-q} \\ + \lambda^2 \cdot C (\alpha + q) \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{p(\zeta)}{q-\zeta} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad . \quad (34)$$

und näherungsweise

$$t(q) = \lambda \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{p(\zeta)}{q-\zeta} d\zeta - B(q + q_1) \quad . \quad . \quad (35).$$

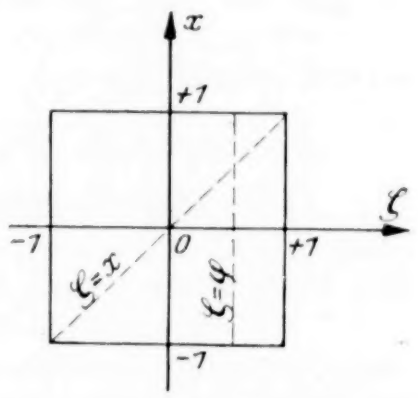


Abb. 9.

Mit Rücksicht auf die Vorschrift in Nr. 8 über den Grenzübergang bei Ausführung der uneigentlichen Integrale darf in dem Doppelintegral die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden, wenn man diese Vorschrift nach der Vertauschung an den Stellen $\zeta = q$ und $\zeta = x$ beachtet (Abb. 9). Also ist

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\zeta}{q-\zeta} \int_{-1}^{+1} \frac{p(x)}{\zeta - x} dx = \int_{-1}^{+1} p(x)\, dx \int_{-1}^{+1} \frac{d\zeta}{(q-\zeta)(\zeta - x)},$$

worin das Integral $L(q, x) = \int_{-1}^{+1} \frac{d\zeta}{(q-\zeta)(\zeta - x)}$ eine symmetrische Funktion von q und x darstellt. Für $-1 < q < x < +1$ ergibt sich

$$L(q,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{q-\varepsilon} + \int_{q+\varepsilon}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+1} \right] = \frac{1}{x-q} \cdot \ln \frac{(1+x)\cdot(1-q)}{(1-x)\,(1+q)}$$

und wegen der Symmetrie gilt dieselbe Lösung für $-1 < x < q < +1$ [2]). Aus Gl. (34) folgt daher

$$p(q) = -\lambda^2 \cdot \int_{-1}^{+1} \left[L(q,x) - \frac{C(\alpha+q)}{q-x} \right] \cdot p(x)\, dx + A - D \cdot s_g + \lambda \cdot B(q + q_1) \cdot \ln \frac{1+q}{1-q}.$$

Setzt man die gesuchte Integralgleichung nun in der Form

$$p(q) + \lambda^2 \cdot \int_{-1}^{+1} K(q,x) \cdot p(x)\, dx = f(q)$$

an, so haben der Kern $K(q,x)$ und die Störungsfunktion $f(q)$ folgende Werte: Im Haftgebiet ist wegen $s_g = 0$

$$K_0(q,x) = L(q,x) - \frac{C(\alpha+q)}{q-x} = \sim L(q,x), \qquad f_0(q) = A + \lambda \cdot B(q + q_1) \cdot \ln \frac{1+q}{1-q},$$

[1]) Näherungsweise darf im folgenden auch $A = D \cdot \left[s - 2\lambda \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) b \right]$ und $C = 0$ gesetzt werden, wenn $\frac{p(q)}{G}$ gegen 1 klein ist.

[2]) Es ist bemerkenswert, daß die Funktion $L(q,x)$ für $x = q$ den Wert $\frac{2}{1-q^2}$ annimmt, sie ist also im Innern des Quadrates $(-1 < q < +1)(-1 < x < +1)$ überall stetig, auf dessen Rand dagegen logarithmisch unendlich mit Ausnahme der Endpunkte der Symmetriediagonalen $x = q = +1$ und $x = q = -1$, in denen wegen $\frac{2}{1-q^2} = \frac{2}{(1-q)(1+q)}$ Unendlichkeiten erster Ordnung existieren.

im Gleitgebiet für $s_v > 0$ wegen $t(q) = \mu_0 \cdot p(q)$ dagegen nach Gl. (35)

$$\underset{+}{K}(q, x) = \frac{-1}{\lambda \mu_0 (\varphi - x)}; \quad \underset{+}{f}(q) = -\frac{B}{\mu_0}(q + q_1),$$

und im Gleitgebiet für $s_v < 0$ mit $t(q) = -\mu_0 p(q)$ entsprechend

$$\underset{-}{K}(q, x) = \frac{1}{\lambda \mu_0 (\varphi - x)}; \quad \underset{-}{f}(q) = \frac{B}{\mu_0}(q + q_1).$$

Da die Formen für Kern und Störungsfunktion demnach nur gebietweise bekannt sind, wird man zur Lösung der gefundenen Integralgleichung eine Annahme über die Einteilung der Berührungsfläche hinzunehmen müssen, wie dies bei der für den Fall gleicher Schubmoduln durchgeführten Lösung geschehen ist. Außer den Werten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ für die Grenzen der Gebiete bleiben dann in der Lösung die unbekannten Konstanten A, B, C, α und q_1, welche sich auf die gesuchten Größen a, b und s zurückführen lassen. Bei Voraussetzung einer Reynoldsschen Einteilung würden also die fünf Unbekannten γ_1, γ_2, a, b, s unter Benutzung der Randbedingungen und der Gl. (35) als Nebenbedingungen auf eine ähnliche Weise zu ermitteln sein wie beim Fall gleicher Schubmoduln.

Durch Einsetzen der gefundenen Lösung für $p(q)$ in Gl. (35) erhält man die gesuchte Formel für $t(q)$, nach deren Kenntnis das Problem als gelöst gelten kann.

IV. Ergebnisse aus der Lösung für den Fall gleicher Schubmoduln.

11. Die Vorgänge in der Berührungsfläche. Die in Nr. **9** angegebene Lösung liefert neben der gesuchten Formel zur Berechnung des Schlupfes eine Reihe von Aufschlüssen über Zustand und Vorgänge in der Berührungsfläche.

Es sei kurz an die Aussage von Gl. (23) erinnert, daß die Größe der Berührungsfläche und die Verteilung der Normal-pannungen in ihr bei Vorhandensein der Reibung im wesentlichen dieselben sind, wie sie aus der Hertzschen Theorie der reibungsfreien Berührung bekannt sind. Die Lage der Berührungsfläche weicht nach (22a) nur unwesentlich von der Symmetrie zur y-Achse (Zentralen) ab.

Die Berührungsfläche besteht für alle praktisch in Frage kommenden Belastungsfälle aus einem Haftgebiet an der Auflaufseite ($q = +1$) und einem Gleitgebiet an der Ablaufseite ($q = -1$). Die Grenze γ_1 zwischen den beiden Gebieten liegt dabei für einen bestimmten Belastungswert $\beta = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{b}{\mu_0}$ um so näher an der Auflaufseite, je größer der Nutzungswert $\nu = \frac{T}{\mu_0 \cdot N} = \frac{T}{T_{max}}$ ist, d. h. der Anteil des Gleitgebietes an der Berührungsfläche wächst entsprechend der Gleichung

$$\nu = \frac{1 + \gamma_1}{4} \cdot \left[3 - \gamma_1 + \frac{\beta}{2} \cdot (1 - \gamma_1)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30a)$$

stetig und ständig mit dem Nutzungswert von 0 bis 1. Nur für $\beta > 1$ [1]) weicht das Haftgebiet bei größeren Nutzungswerten auch an der Auflaufseite vor einem Gleitgebiet mit der Grenze γ_2 zurück, und zwar ist dann γ_1 stets dreimal soweit vom Wert $1/\beta$ entfernt

[1]) Belastungswerte $\beta > 1$ lassen sich nicht ohne so große Formänderungen verwirklichen, daß die Vernachlässigungen der Rechnung zulässig erscheinen. Die Rechnung läßt sich also auf die Reynoldsschen Beobachtungen nur mit diesem Vorbehalt anwenden.

Erläuterungen zu nebenstehender Abb. 10.

φ = dimensionslose Abszisse:

Grenzen der Berührungsfläche von der Breite $2b$: links $q = -1$ Ablaufseite, rechts $q = +1$ Auflaufseite; Bewegungsrichtung der Punkte in der Berührungsfläche von rechts nach links; Grenzen des Haftgebietes: links $q = \gamma_1$, rechts $q = \gamma_2$ ($\gamma_2 = 1$, wo nichts anderes vermerkt).

$w(q) = \frac{t(q)}{\mu_0 \cdot p_0}$ = dimensionslose Ordinate:

$t(q)$ = Tangentialspannung an der Stelle q; p_0 = größte Druckspannung, welche zu einer bestimmten Normalkraft N gehört; μ_0 = Koeffizient der Gleitreibung, also $\mu_0 \cdot p_0$ und $\mu_0 N$ größte Werte der Tangentialspannung $t(q)$ und Tangentialkraft T, die zu der Kraft N gehören; $\beta = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{b}{\mu_0}$ = Belastungswert, worin R_1 und R_2 die Radien der treibenden und getriebenen Scheibe sind; $\nu = \frac{T}{\mu_0 N}$ = Nutzungswert.

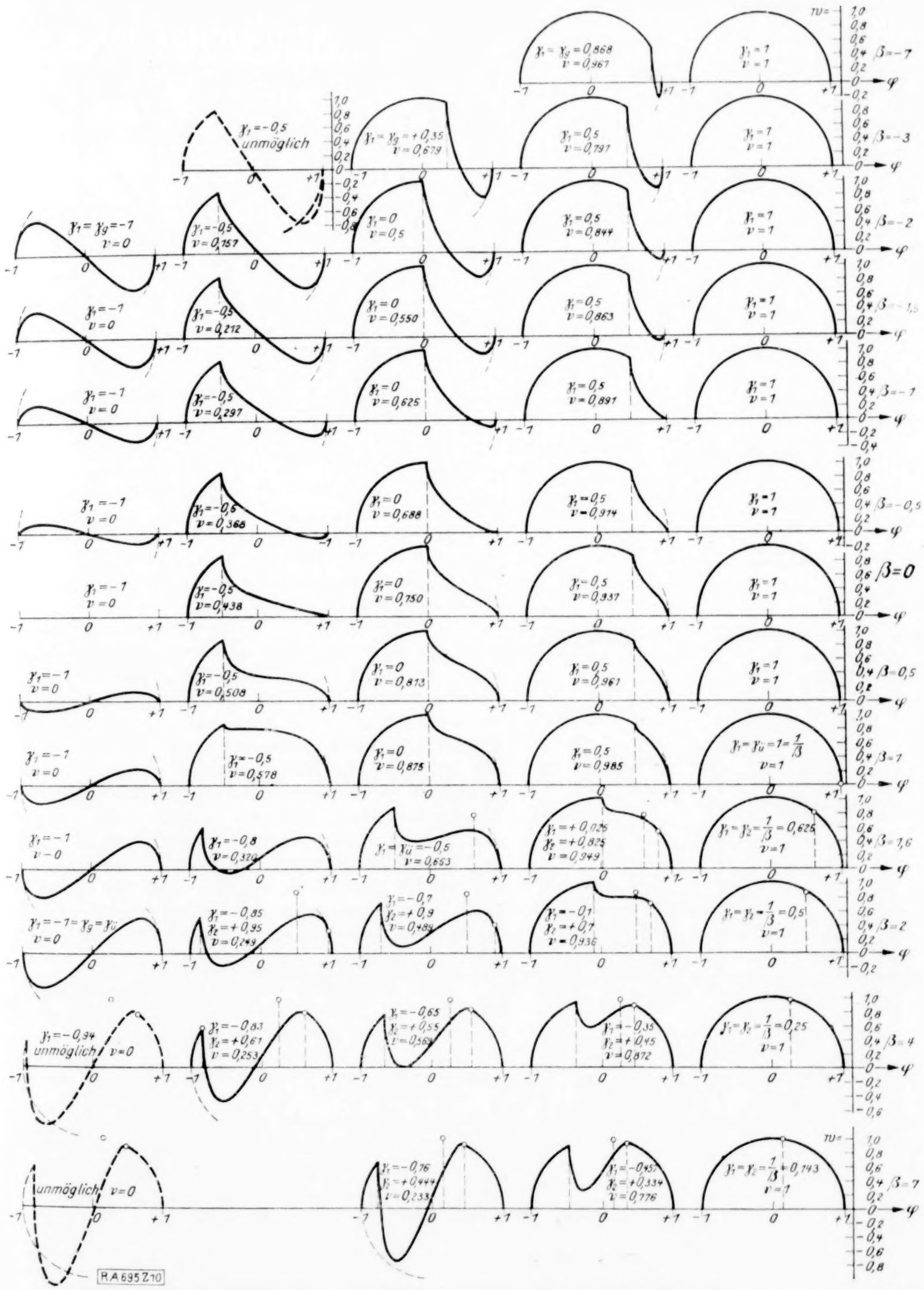


Abb. 10. Tangentialspannungen in der Berührungsfläche infolge Reibung unter verschiedenen Bedingungen, dargestellt durch die Verhältniswerte $w(\varphi) = \dfrac{t(\varphi)}{\mu_0 \cdot p_0} = \dfrac{t(\varphi)}{t_{max}}$.

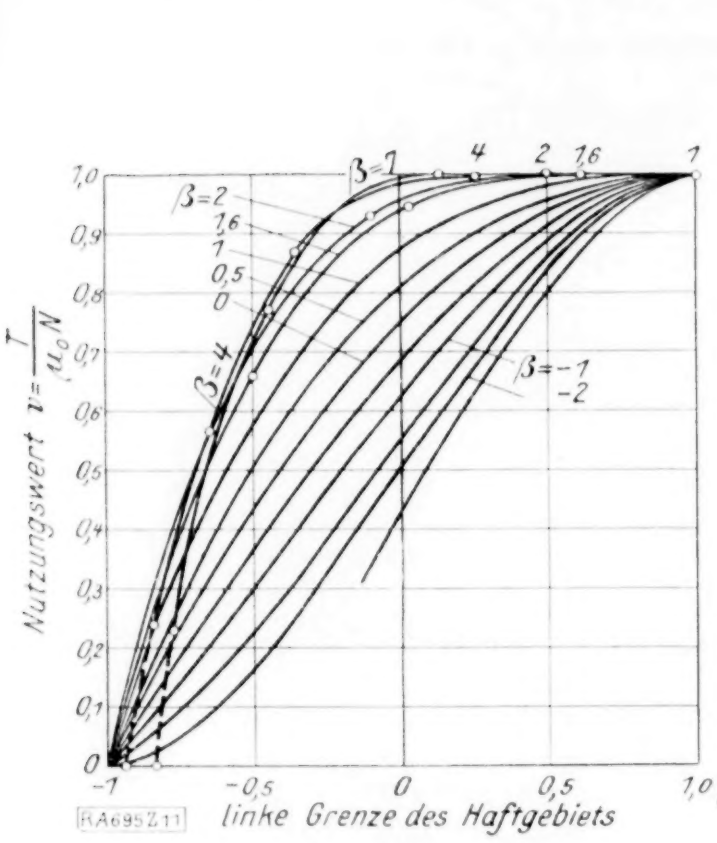


Abb. 11.

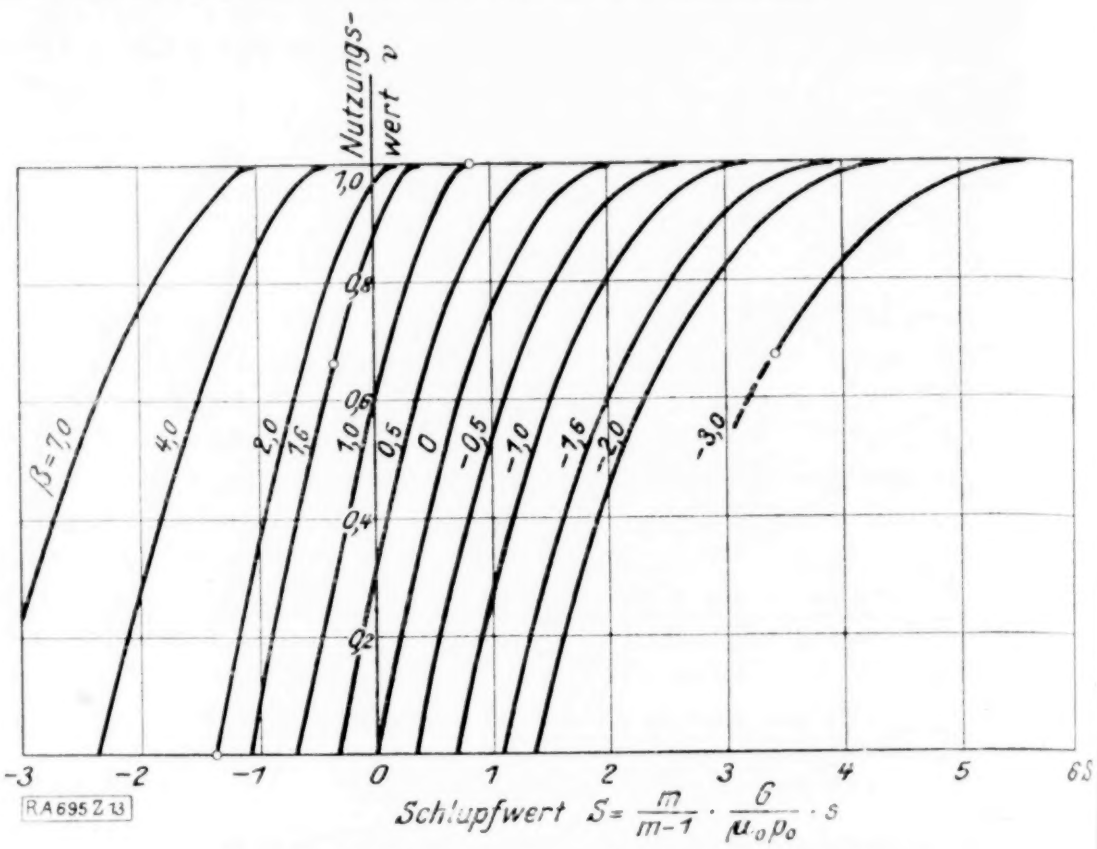


Abb. 13. Schlupfkurven bei elastischem Rollen.

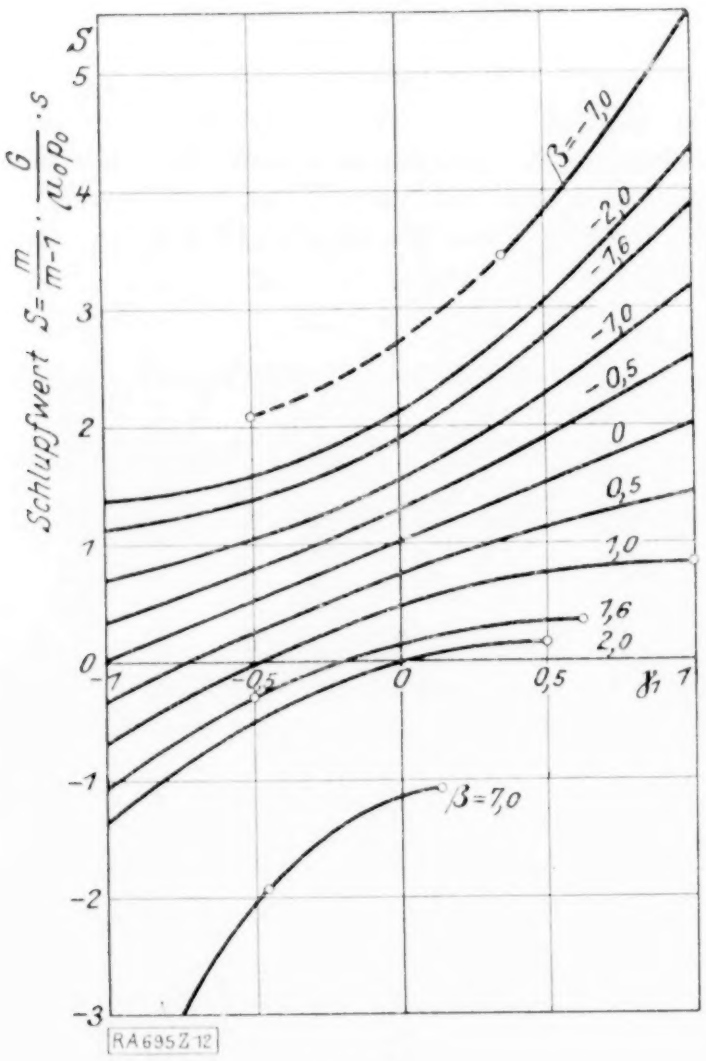


Abb. 12.

wie γ_2, bis sich γ_1 und γ_2 für $\nu = 1$ bei $1/\beta$ treffen und das Haftgebiet verschwunden ist. Für $|\beta| > 2$ versagt die Lösung bei kleinen Werten von ν.

Der geschilderte Zusammenhang zwischen ν, γ_1, γ_2 und β und die nach Gl. (29) und (28a) zu berechnende Verteilung der Tangentialspannungen über die Berührungsfläche sind in Abb. 10 und 11 dargestellt. Die gerade Grundlinie kann jedesmal von -1 bis $+1$ als Bild der Berührungsfläche gelten. Beim Vergleich verschiedener Kurven der Abb. 10 ist zu beachten, daß $\mu_0 \cdot p_0$ und β nicht eindeutig miteinander verknüpft sind. Sind aber bei Beurteilung eines bestimmten Reibungstriebes die Radien R_1 und R_2 und der Koeffizient μ_0 als konstant zu betrachten, so verändern sich $\mu_0 \cdot p_0$ und β miteinander und mit $\sqrt{N}$ proportional.

Eine möglichst allgemeingültige Darstellung für den Schlupf und den Gleitschlupf gewinnt man aus der Betrachtung der Größen

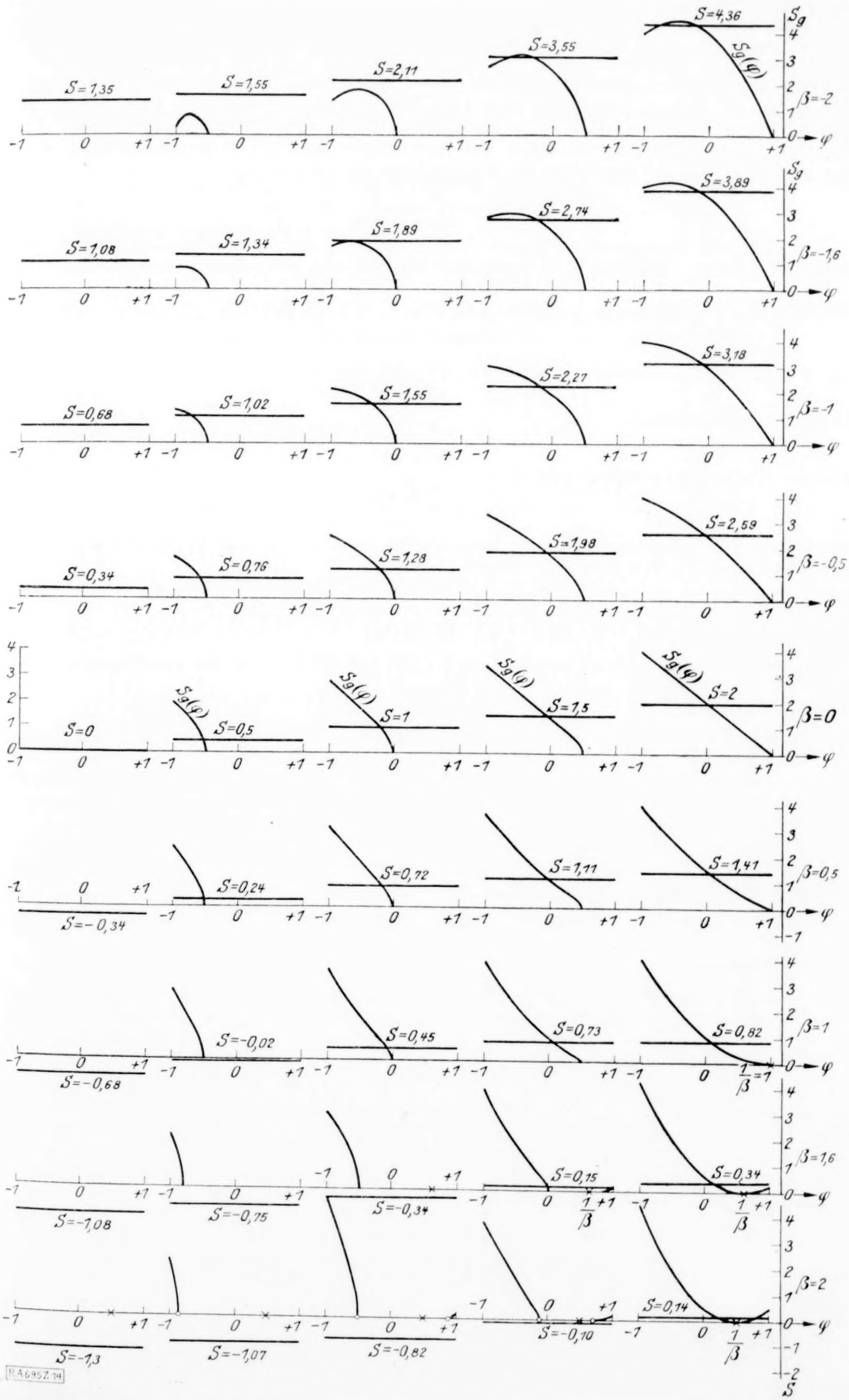
$$S = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{G}{\mu_0 p_0} \cdot s \quad \text{und} \quad S_g = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{G}{\mu_0 p_0} \cdot s_g .$$

Aus Gl. (28a, b) folgt, daß im ganzen Gültigkeitsbereich der Lösung der Schlupf mit γ_1, also auch mit dem Nutzungswert wächst, wenn β, μ_0 und p_0 unverändert bleiben, ein Ergebnis, daß erwartet werden konnte. Für den Wert S_g gilt nach Seite 44

$$S_g(\varphi) = \frac{2}{\pi \mu_0 p_0} [U(\varphi) - U_0] = \pm 2 (f_0 + f_1 \cdot \psi) \cdot \sqrt{\psi^2 - 1} \qquad (|\psi| > 1).$$

Abb. 14 (nebenstehend). Schlupfwerte S und Gleitschlupfwerte $S_g(\varphi)$ unter verschiedenen Bedingungen (Werte von γ_1, γ_2 und ν nach Abb. 10).

Ordinaten: $S = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{G}{\mu_0 p_0} \cdot s$ und $S_g(\varphi) = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{G}{\mu_0 p_0} \cdot s_g(\varphi)$.


S=1,35
S=1,55
S=2,11
S=3,55
S=4,36
Sg(φ)
Sg
β=-2
S=1,08
S=1,34
S=1,89
S=2,74
S=3,89
β=-1,6
S=0,68
S=1,02
S=1,55
S=2,27
S=3,18
β=-1
S=0,34
S=0,76
S=1,28
S=1,98
S=2,59
β=-0,5
S=0
S=0,5
S=1
S=1,5
S=2
β=0
S=-0,34
S=0,24
S=0,72
S=1,11
S=1,41
β=0,5
S=-0,68
S=-0,02
S=0,45
S=0,73
S=0,82
β=1
S=-1,08
S=-0,75
S=-0,34
S=0,15
S=0,34
β=1,6
S=-1,3
S=-1,07
S=-0,82
S=-0,10
S=0,14
β=2
φ
1/β=1
RA695Z 14

In Abb 12 ist S in Abhängigkeit von γ_1 für verschiedene β dargestellt[1]). Elimination von γ_1 aus Abb. 11 und 12 führt zu Abb. 13, in welcher die Kurven $\beta =$ konstant die sogenannten Schlupfkurven sind, die man sich bei $\nu = 1$ in Richtung der positiven S-Achse beliebig verlängert denken muß, wenn man auch die Fälle einbeziehen will, in denen überall Gleiten stattfindet, also auch keine Haftlinie existiert. Der Verlauf der Gleitschlupfwerte $S_g(q)$ [1]) in Abhängigkeit von q zeigt Abb. 14 für Belastungsfälle (β, ν) der Abb. 10. Der Abstand zwischen der $S_g(q)$-Kurve und der eingezeichneten Geraden für S ist ein Maß für den Wert des Formänderungsschlupfes, da

$$S - S_g = S_\varepsilon = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{G}{\mu_0 \cdot p_0} \cdot s_\varepsilon \qquad \text{ist.}$$

Auch der Energieverlust durch Gleitreibung in der Berührungsfläche kann jetzt bestimmt werden. Die von der treibenden Scheibe auf ihrer Längeneinheit in der Berührungsfläche je Zeiteinheit geleistete Arbeit ist $L_1 = b \cdot \int_{-1}^{+1} v_1(q) \cdot t(q)\, dq$, und entsprechend für die getriebene Scheibe $L_2 = -b \int_{-1}^{+1} v_2(q) \cdot t(q)\, dq$, also der Energieverlust für die Längen- und Zeiteinheit

$$L_v = L_1 + L_2 = b \cdot \int_{-1}^{+1} v_g(q) \cdot t(q)\, dq\,.$$

Für die Gleitgeschwindigkeit gilt aber

$$v_g = v_1 - v_2 = R_1\, \omega_1 \cdot s_g = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\mu_0\, p_0}{G} \cdot R_1\, \omega_1 \cdot S_g(q)\,,$$

ferner mit großer Annäherung $v_1 = R_1\, \omega_1$, also $L_1 = R_1\, \omega_1 \cdot T = R_1\, \omega_1 \cdot \pi/2\, b\, \nu\, \mu_0\, p_0$. Daher erhält man für den relativen Energieverlust

$$V = \frac{L v}{L_1} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{2}{\pi\, \nu\, G} \cdot \int_{-1}^{+1} S_g(q) \cdot t(q)\, dq\,.$$

Das im allgemeinen elliptische Integral läßt sich für $\beta < 1$ in der geschlossenen Form

$$V = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\mu_0 \cdot p_0}{4\, \nu \cdot G} (1+\gamma_1)^2 \cdot \left[(3-\gamma_1) + \frac{\beta}{16} \cdot (1 - 22 \cdot \gamma_1 + 9 \cdot \gamma_1{}^2)\right]$$

darstellen. ν oder γ_1 können durch Gl. (30a) eliminiert werden, woraus sich die Kurven in Abb. 15 ergeben. Beachtenswert ist, daß V und s nicht identisch sind, wie die Formeln zeigen. Für den Hebelarm e der Rollreibung, der dem relativen Verlust V entspricht, gilt der dimensionslose Ausdruck

$$\frac{8}{\mu_0{}^2} \cdot \left(\frac{e}{b}\right) = (1+\gamma_1)^2 \cdot \left[(3-\gamma_1) + \frac{\beta}{16}(1 - 22 \cdot \gamma_1 + 9 \cdot \gamma_1{}^2)\right],$$

der in Abb. 16 dargestellt ist.

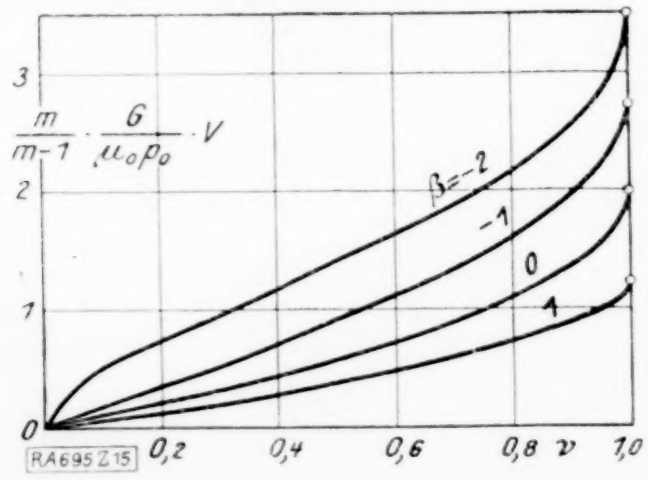


Abb. 15. Relativer Rollverlust $V = \frac{L_v}{L_1}$.

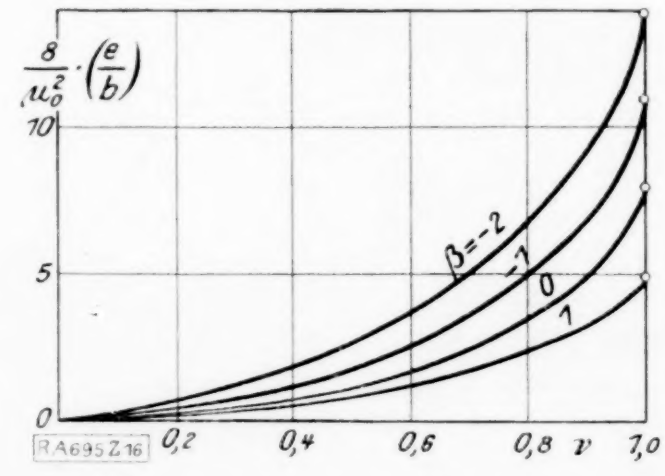


Abb. 16. Hebelarm der Rollreibung e.

[1]) Für $\gamma_2 = 1$ wird $S = (1+\gamma_1) - \frac{\beta}{8} \cdot \left(\frac{4\,m-3}{m-1} + 2\,\gamma_1 + 3\,\gamma_1{}^2\right)$

und $S_g(q) = 2 \cdot \left(1 - \beta\,\frac{1+\gamma_1}{4} - \beta\,\frac{q}{2}\right) \cdot \sqrt{(\gamma_1 - q)(1-q)} \qquad (q \leqq \gamma_1)$.

Die Kenntnis der Randspannungen $p(q)$ und $t(q)$ in der Berührungsfläche gestattet nun auch, für die Berührung-fläche selbst und den Scheibenrand in ihrer Umgebung die genauere Gestalt, die Verzerrungen und die Materialbeanspruchung zu berechnen. Die Werte $\eta' = \frac{d\,\eta\,(q)}{d\,q}$ und $\frac{d\,\xi\,(q)}{d\,q}$ sind aus Gl. (19) durch Ableitung zu erhalten, wobei für die uneigentlichen Integrale die durch Gl. (23), (24), (25) gegebenen Cauchyschen Hauptwerte zu setzen sind. Für die Gestalt des Randes findet man nun $\eta\,(q) = \int_0^q \eta'\,(\zeta)\,d\,\zeta$ und für die Tangentialdehnung $\varepsilon = \frac{1}{b} \cdot \frac{d\,\xi\,(q)}{d\,q}$, an deren Stelle man besser die dimensionslosen Größen

$$H = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{G}{p_0} \cdot \frac{\eta\,(q)}{b} \quad \text{und} \quad E = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{G}{p_0} \cdot \varepsilon\,(q)$$

einführt. Unter Vernachlässigung von α und b/R gegen 1 hat man dann mit der Abkürzung $w\,(\zeta) = \frac{t\,(\zeta)}{\mu_0\,p_0}$ zu der entsprechend dargestellten ursprünglichen Gestalt

$$Y = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{G}{p_0} \cdot \frac{y\,(q)}{b} = \frac{q^2}{R \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

innerhalb der Berührungsfläche[1]) ($|q| \leq 1$)

$$H_i = -\frac{q^2}{2} + \frac{m-2}{2\,(m-1)} \cdot \mu_0 \cdot \int_0^q w\,(\zeta)\,d\,\zeta + \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{b}{R}\right) \ln\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \nu \cdot q$$

$$E_i = \frac{b}{R} \cdot \left[\frac{m}{2\,(m-1)} + q^2\right] - \frac{m-2}{2\,(m-1)} \sqrt{1-q^2} - \mu_0 \cdot \left[\frac{1+\gamma_1}{2} - \frac{\beta}{4} \cdot \frac{3+2\gamma_1+3\gamma_1^2}{4} + \frac{\beta}{2}\,q^2 - \frac{S_\vartheta}{2}\right]$$

und **außerhalb der Berührungsfläche**, je nachdem $q \gtrless 1$ ist,

$$H_a = \frac{1}{2} \ln\left(|q| - \sqrt{q^2-1}\right) - \frac{1}{2}\left(q^2 - |q| \cdot \sqrt{q^2-1}\right) + \frac{m-2}{2\,(m-1)} \cdot \mu_0 \cdot \int_0^{\pm 1} w\,(\zeta)\,d\,\zeta$$

$$+ \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \ln\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \nu \cdot q$$

$$E_a = \frac{b}{R} \cdot \left[\frac{m}{8\,(m-1)} + q^2 - |q| \cdot \sqrt{q^2-1}\right] - \mu_0 \left[\frac{1+\gamma_1}{2} - \frac{\beta}{4} \cdot \frac{3+2\gamma_1+3\gamma_1^2}{4} + \frac{\beta}{2}\,q^2 - \frac{S_\vartheta}{2} \mp \sqrt{q^2-1}\right]$$

Für die treibende Scheibe hat man hierin $R = R_1$ zu setzen, für die getriebene Scheibe dagegen $R = R_2$ zu setzen und μ_0 durch $-\mu_0$ zu ersetzen.

Die Materialbeanspruchung soll bei nicht zu spröden Stoffen nach der größten Schubspannung, bei spröden Stoffen nach der größten Zugspannung beurteilt werden. Die in einem ebenen Schnitt senkrecht zur Zylinderachse wirkende Normalspannung ist eine Hauptspannung. Sie sei mit σ_{III}, die beiden anderen Hauptspannungen seien mit σ_I und σ_{II} bezeichnet. Die drei extremen Beträge der Schubspannungen seien $\tau_I = \left|\frac{\sigma_{II}-\sigma_{III}}{2}\right|$; $\tau_{II} = \left|\frac{\sigma_{III}-\sigma_I}{2}\right|$; $\tau_{III} = \left|\frac{\sigma_I-\sigma_{II}}{2}\right|$. Diese sechs Größen können für jeden Randpunkt in bekannter Weise durch die dort gegebenen Werte der Randspannungen $p(q)$ und $t(q)$ und der Dehnung ε ausgedrückt werden. Führt man als »Beanspruchungswerte« die Verhältnisse

$$B_{I,\,II,\,III} = \frac{\tau_{I,II,III}}{p_0} \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_{I,\,II,\,III} = \frac{\sigma_{I,II,III}}{p_0}$$

ein, so ergibt sich **innerhalb der Berührungsfläche**

$$B_{III} = \sqrt{\left[E_i + \frac{m-2}{2\,(m-1)} \sqrt{1-q^2}\right]^2 + [\mu_0 \cdot w\,(q)]^2}$$

$$B_{I,\,III} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{m-2}{m} \cdot E_i - \frac{m-2}{2\,(m-1)} \cdot \sqrt{1-q^2} \mp B_{III}\right|$$

[1]) $\int_0^q w\,(\xi)\,d\,(\xi)$ kann durch Planimetrieren der Abb. 10 entnommen werden.

und $\Sigma_{I,\,III} = \frac{\sigma_{I,\,II}}{p_0} = E_i - \frac{m}{2\,(m-1)} \cdot \sqrt{1-\varphi^2} \mp B_{III\,i}$, $\Sigma_{III\,i} = \frac{\sigma_{III}}{p_0} = \frac{2}{m} \cdot E_i - \frac{1}{m-1} \cdot \sqrt{1-\varphi^2}$,

schließlich **außerhalb** der Berührungsfläche:

$B_{III\,a} = |E_a|$, $B_{I\,a} = 1/m\,|E_a|$, $B_{II\,a} = \frac{m-1}{m} \cdot |E_a|$ und $\Sigma_{III\,a} = 2/m \cdot E_a$, $\Sigma_{I,\,II\,a} = E_a \pm |E\varepsilon_a|$.

Die Werte von Y, H, E und B sind für das Beispiel einer Rolle auf einer Schiene mit dem Reibungskoeffizienten $\mu_0 = 0{,}26$ in Abb. 17 für die Nutzungswerte 0; $^3/_4$ und 1 dargestellt. Die Formeln zeigen, daß $Y(\varphi)$ nur vom Verhältnis der Radien $\frac{R_1}{R_2}$ abhängt (vgl. Abb. 17, »Rolle treibend«), die übrigen Funktionen H, E, B und Σ dagegen nur mit $\beta, \frac{b}{R_1}, \frac{b}{R_2}$ und mit μ_0 sich ändern. Der Einfluß der ersten drei Größen ist bei elastisch deformierten Metallscheiben sehr gering, wie z. B. der Unterschied zwischen E_{Rolle} und E_{Schiene} für $\nu = 0$ in Abb. 17 zeigt, der Einfluß von μ_0 dagegen ist beträchtlich, läßt sich jedoch leicht überblicken. Es sind nämlich für H und E die arithmetischen Mittel aus den Werten für beide Scheiben $H_m = \frac{H_1 + H_2}{2}$ und $E_m = \frac{E_1 + E_2}{2}$ von μ_0 und damit auch von γ_1, also von ν unabhängig und können daher der Darstellung für $\nu = 0$ entnommen werden. Die Abweichungen von diesen Mittelwerten für einen anderen Wert von ν sind aber dem Koeffizienten μ_0 proportional und betragen $\frac{H_1 - H_2}{2}$ und $\frac{E_1 - E_2}{2}$; sie sind bei $\mu_0 = 0{,}26$ für E aus Abb. 17 ($\nu = {}^3/_4$ und $\nu = 1$) zu entnehmen. — Für $B_{I,\,II}$ und $\Sigma_{I,\,II}$ gelten dieselben Beziehungen hinsichtlich der Mittelwerte $\frac{B_{I_1} + B_{II_2}}{2}$, $\frac{B_{I_2} + B_{II_1}}{2}$ und $\frac{\Sigma_{I_1} + \Sigma_{II_2}}{2}$, $\frac{\Sigma_{I_2} + \Sigma_{II_1}}{2}$, während B_{III} selbst nahezu proportional μ_0 ist und für Σ_{III} dasselbe gilt wie für H und E. Solange man sich also auf die Betrachtung des elastischen Rollens von Metallscheiben aufeinander beschränkt, bei welchem die Werte β, $\frac{b}{R_1}$, $\frac{b}{R_2}$ stets sehr klein sind, stellt Abb. 17 den typischen Verlauf der Funktionen H, E und B dar, welche nur durch μ_0 in der angedeuteten übersichtlichen Weise variiert werden. Von den Darstellungen in den Abb. 10 bis 16, welche sämtlich von μ^0 unabhängig sind, kommen hierzu die für $\beta = 0$ in Frage.

Ein wertvolles Ergebnis ist, daß die größten Zugspannungen die Spannungen σ_x an der Grenze der Berührungsfläche sind und daß die größten Schubspannungen im Inneren der Berührungsfläche herrschen. Für kreisförmige Druckflächen hat Huber[1]) die Spannungsverteilung bei reibungsfreier Berührung angegeben und daraus geschlossen, daß die größte Zugspannung am Rande und zwar in radialer Richtung auftritt. Aus seinen Gl. (18) und (19) erkennt man ohne Schwierigkeit, daß die größte Schubspannung im Innern des Druckkreises herrscht. Die Ergebnisse stimmen also im wesentlichen überein.

Wenn $|\beta| < 0.1$ ist, was in vielen Fällen der praktischen Anwendung, z. B. bei hartelastischen Materialien zutrifft, darf man ohne zu großen Fehler $\beta = 0$ setzen. Dann erhält man die einfachen Formeln

$$p(\varphi) = p_0 \cdot \sqrt{1-\varphi^2}$$

im Gleitgebiet $\quad t(\varphi) = \mu_0\, p_0 \cdot \sqrt{1-\varphi^2} \qquad (-1 \leqq \varphi < \gamma)$

und im Haftgebiet $\quad t(\varphi, \gamma) = \mu_0\, p_0 \cdot [\sqrt{1-\varphi^2} - \sqrt{(1-\varphi)(\varphi-\gamma)}] \qquad (\gamma \leqq \varphi \leqq +1)$

$$\nu(\gamma) = \frac{T}{\mu_0 \cdot N} = \frac{1+\gamma}{4} \cdot (3-\gamma), \qquad s(\gamma) = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\mu_0\, p_0}{G} \cdot (1+\gamma)$$

$$s_\varrho(1, \gamma) = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\mu_0\, r_0}{G} \cdot 2 \cdot \sqrt{(1-\varphi)(\gamma-\varphi)} \qquad (-1 \leqq \varphi \leqq \gamma)$$

$$V = \frac{L_v}{L_1} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\mu_0\, p_0}{G} \cdot (1+\gamma) = s$$

$$e = \frac{\mu_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \cdot \nu \cdot V.$$

---

[1]) M. T. Huber, Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. Ann. d. Phys. 1904, 4. Folge, Bd. 14, S. 160.

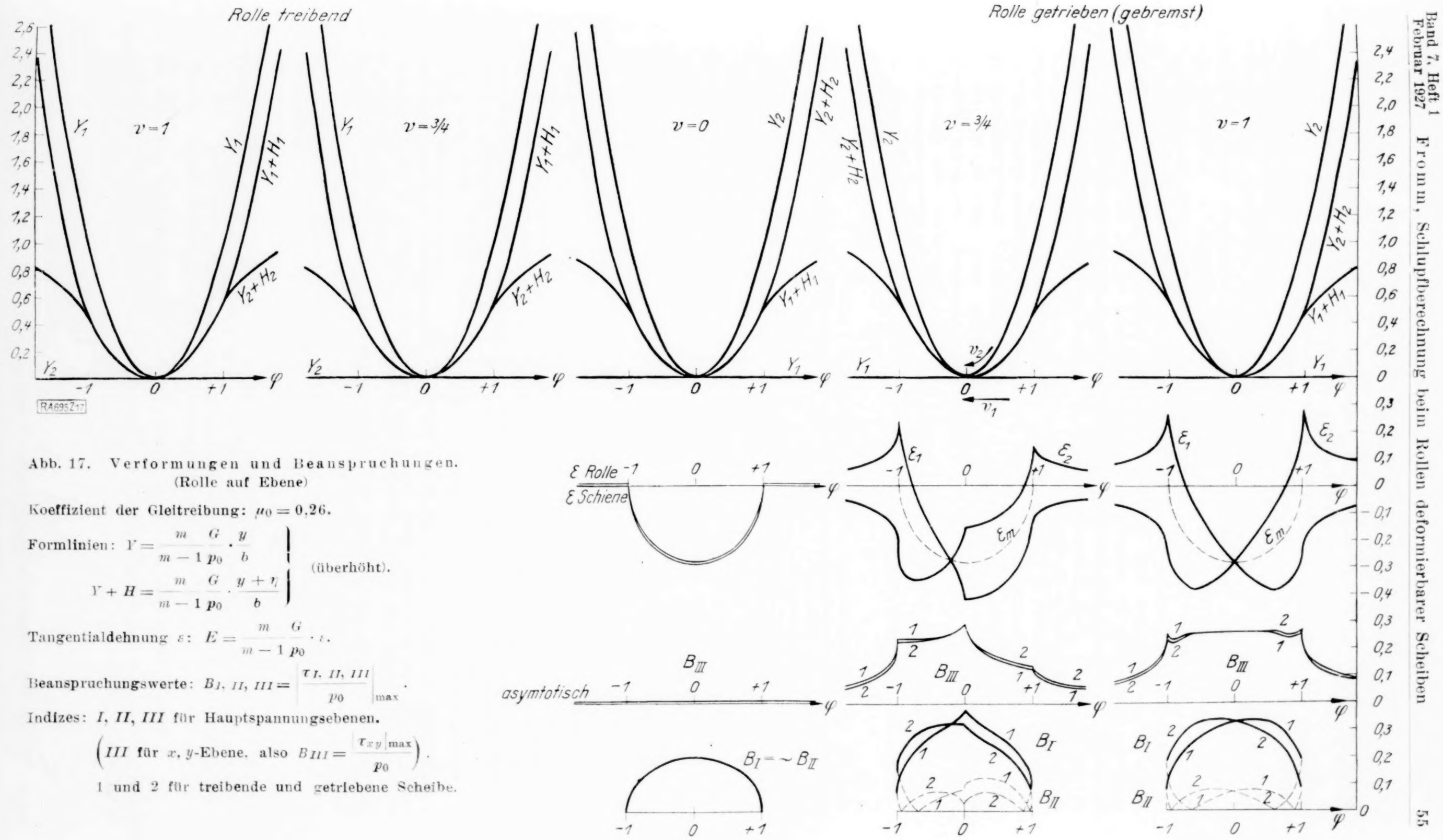


Abb. 17. Verformungen und Beanspruchungen.
(Rolle auf Ebene)

Koeffizient der Gleitreibung: $\mu_0 = 0{,}26$.

Formlinien: $$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{m}{m-1}\frac{G}{p_0}\cdot\frac{y}{b} \\ Y+H &= \frac{m}{m-1}\frac{G}{p_0}\cdot\frac{y+\eta}{b} \end{aligned}\right\} \quad \text{(überhöht).}$$

Tangentialdehnung ε: $$E = \frac{m}{m-1}\frac{G}{p_0}\cdot\varepsilon.$$

Beanspruchungswerte: $$B_{I,\,II,\,III} = \left|\frac{\tau_{I,\,II,\,III}}{p_0}\right|_{\max}.$$

Indizes: *I*, *II*, *III* für Hauptspannungsebenen.

$\left(III\right.$ für x, y-Ebene, also $\left.B_{III} = \dfrac{|\tau_{xy}|_{\max}}{p_0}\right)$.

1 und 2 für treibende und getriebene Scheibe.

Durch Elimination von γ aus $\nu(\gamma)$ und $s(\gamma)$ entsteht die Gleichung der Schlupfkurve

$$\left.\begin{aligned} s(\nu) &= \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\mu_0\, p_0}{G}\, 2 \cdot (1 - \sqrt{1-\nu}) \\ \text{oder} \qquad s &= 2\,\mu_0 \cdot \sqrt{\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{N}{\pi\, G}} \cdot (1 - \sqrt{1-\nu}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (36),$$

also die einer Parabel.

12. Vergleich mit Versuchsergebnissen. Es erscheint nicht als unmöglich, einen Vorgang wesentlich elastischen Rollens zu verwirklichen, für den eine ungefähre Gültigkeit der abgeleiteten Formeln zu erwarten ist, und es wäre von Interesse, Versuche an ihm zur Prüfung der Brauchbarkeit der Formeln vorzunehmen[1]). Von bereits ausgeführten Versuchen sind dem Verfasser keine bekannt, bei welchen eine hierfür genügende Glätte der Oberfläche vorausgesetzt werden darf, d. h. bei welchen die Abmessungen der Rauhigkeitserhebungen hinreichend klein gegenüber der Breite der Berührungsfläche sind. Eine Uebereinstimmung in Zahlenwerten darf also im folgenden nicht erwartet werden.

Bei den Versuchen von Jahn[2]) über das Abwärtsrollen einer Stahlrolle vom Radius $R = 6$ cm auf Stahlschienen von 0,4 cm Breite lag im übrigen eine geeignete Belastung $N = 134$ kg/cm^{-1}, also $p_0 = 2920$kg/cm^{-2}, $b = 0\,0516$ cm vor. Zwei unter verschiedenen Bedingungen gemessenen Koeffizienten der Gleitreibung entsprechen die Werte

μ_0	β	$t_{max} = \mu_0\, p_0$	$T_{max} = \mu_0 \cdot N$
0.26	− 0,0332	760 kg/cm^{-2}	35 kg/cm^{-1}
0,149	− 0,0577	435 »	20 »

und für die Nutzungswerte $\nu = 0$; 0,75 und 1 findet man:

	$\mu_0 =$	0,26			0,149			
	$\nu =$	0	0.75	1	0	0,75	1	
	$T =$	0	26	35	0	15	20	kg/cm^{-1}
	$s = V =$	0	0,633	1,266	0	0,362	0,724	10^{-3}
	$e =$	0	1.3	3.5	0	0,43	1,15	10^{-3} cm
	$s_{g\,max} =$	0	1,78	2,53	0	1,02	1,45	10^{-3}
	$(y + \eta)_{\varphi=-1} =$	0,063	0,068	0,070	0,063	0,068	0,070	10^{-3} cm
Treibende Scheibe (Ebene)	$\varepsilon_{1\,max} =$	0	+ 0,57	+ 0,63	0	+ 0,33	+ 0,36	10^{-3}
	$\varepsilon_{1\,min} =$	− 0,705	− 1,01	− 0,94	− 0,705	− 0,87	− 0,78	10^{-3}
	$\tau_{1\,max} =$	590	1090	990	590	875	800	kg/cm^{-2}
	$\sigma_{1\,max} =$	15	1380	1520	15	810	885	kg/cm^{-2}
Getriebene Scheibe (Rolle)	$\varepsilon_{2\,max} =$	+ 0 024	+ 0,33	+ 0,66	+ 0,024	+ 0,19	+ 0,38	10^{-3}
	$\varepsilon_{2\,min} =$	− 0,680	− 0,85	− 0,92	− 0,680	− 0,73	− 0.78	10^{-3}
	$\tau_{2\,max} =$	590	940	980	590	790	800	kg/cm^{-2}
	$\sigma_{2\,max} =$	53	805	1580	53	475	920	kg/cm^{-2}
Kontrolle: $\alpha = 0$		0	− 0,483	− 0,597				10^{-3}

Man beachte die beträchtliche Erhöhung der Materialbeanspruchung (τ_{max}, σ_{max}) durch die Reibung und die Merkwürdigkeit, daß $\tau_{1\,max}$ für $\nu = 0{,}75$ größer ist als für $\nu = 1$. Die Versuchsanordnung mit $\mu_0 = 0.26$ wurde der Berechnung der Abb. 17 zugrunde gelegt. Bei $\mu_0 = 0{,}149$ hat Jahn genaue Schlupfmessungen bei kleinen Neigungswinkeln δ ausgeführt[2]), welche mittels der Beziehung[3])

$$\nu = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\mu_0\left[1 + \frac{R^2}{i^2}\right]} \qquad (i = \text{Trägheitsradius der Rolle})$$

[1]) Stahlscheiben mit polierten Oberflächen dürften bei einer Breite der Berührungsfläche von $2b = 1{,}3$ cm hinreichend glatt sein. Diese wird bei $R_1 = 20$ cm, $R_2 = -25$ cm (Innentrieb), $p_0 = 4000$ kg/cm^{-2} erreicht, wobei die größte Beanspruchung etwa $\tau_{max} = 1500$ kg/cm^{-2} wird.

[2]) Jahn, a. a. O. und Versuchsprotokolle (siehe oben S. 27 Anm. 1).

[3]) Genauer ist anstelle von $\frac{R^2}{i^2}$ zu setzen: $\frac{R^2}{i^2} \cdot \frac{1}{1-s}$ beim Abwärtsrollen und $\frac{R^2}{i^2}(1-s)$ beim Aufwärtsrollen. Daher ist Rollen mit Haftgebiebt (»reines Rollen«) abwärts bei größeren Neigungen möglich als aufwärts.

in Abb. 18 durch eine Schlupfkurve dargestellt sind. Dazu ist die nach Gl. (36) berechnete Kurve aufgetragen, die wesentlich kleinere Schlupfe zeigt.

Neben den Jahnschen Versuchen stehen nur vier Versuchsreihen von Sachs an Flußeisenscheiben mit nur 0,25 cm Laufbreite (gegenüber $2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$ cm bei Jahn) zum Vergleich zur Verfügung[1]). Mit Rücksicht auf die rasche Zunahme des Koeffizienten der Gleitreibung darf bei einem Vergleich mit der Rechnung nicht der höchste jeweils erreichte Wert als μ_0 eingesetzt werden. Es wurden hierfür die Werte kurz vor Beginn großer Schlupfe und vor dem Eintreten von Unregelmäßigkeiten gewählt und der Wiedergabe der Ergebnisse aus den Versuchen und der Rechnung in den Abb. 18, 19 und 20 zugrunde gelegt. In Abb. 18 wurde der Versuch 464 unter Annahme von $\mu_0 = 0{,}413$ und die dazu berechnete Kurve eingetragen und es zeigt sich, daß für nicht zu große Werte von ν Versuch und Rechnung etwa in demselben Verhältnis größere Schlupfe liefern als beim Jahnschen Versuch, nämlich gemäß (36) im Verhältnis $(\mu_0 \cdot p_{0\,\text{Sachs}}) : (\mu_0 \cdot p_{0\,\text{Jahn}}) = (0{,}413 \cdot 1166) : (0{,}149 \cdot 2920) = 480 : 435$.

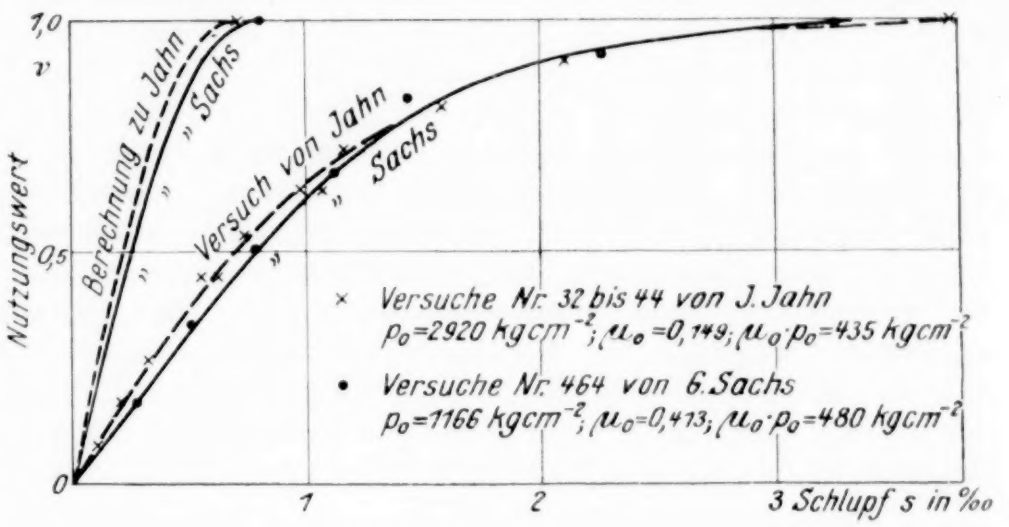


Abb. 18.

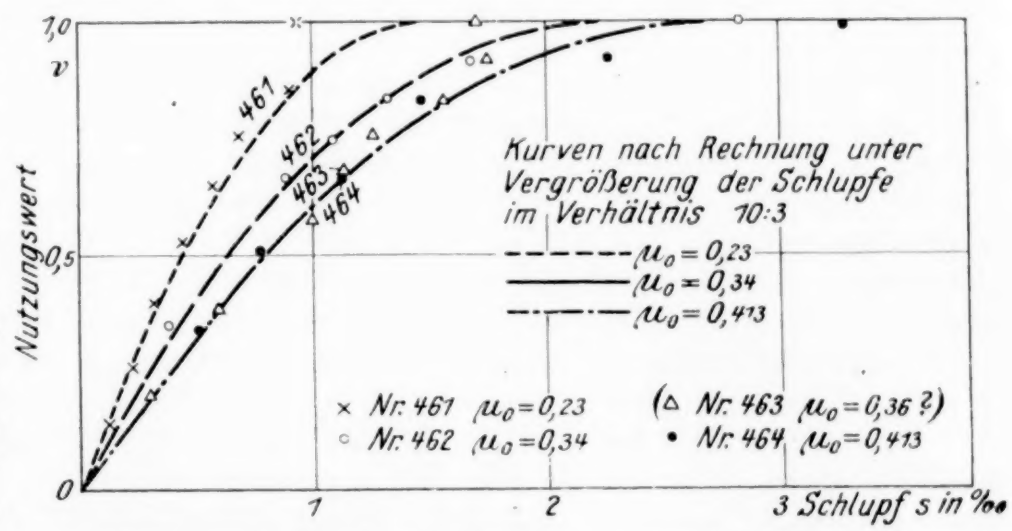


Abb. 19. Versuche von G. Sachs. $p_0 = 1166$ kg/cm^{-2}.

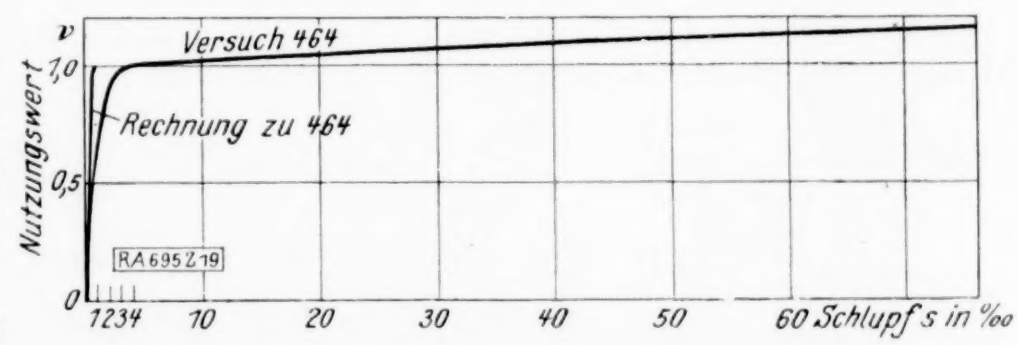


Abb. 20. Vollständiger Versuch Nr. 464 von G. Sachs.

In Abb. 19 geben die Punkte die Sachsschen Versuche Nr. 461 bis 464 unter Annahme der Werte $\mu_0 = 0{,}23$, 0,34, 0 36, 0,413 wieder und die hineingelegten Kurven ergeben sich aus Gl. (36) für $\mu_0 = 0{,}23$, 0,34 und 0,413 ($p_0 = 1166$ kg/cm^{-2}) durch Multiplikation der berechneten Schlupfe mit 3,34. Abb. 20 bringt in stark verkleinertem Schlupfmaßstabe den ganzen von Sachs aufgenommenen Versuch 464 und die dazu berechnete Kurve, um die Lage des in den Abb. 18 und 19 dargestellten Bereiches zu zeigen.

Hinsichtlich der Gestalt der Schlupfkurven und deren Abhängigkeit von den Versuchsbedingungen ist also wesentliche Uebereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung vorhanden. Die Aehnlichkeit der experimentell gefundenen Schlupfkurven (Nutzungswert-Schlupf) mit bekannten Kurven der Festigkeit (Spannung-Dehnung) oder der Gleitreibung (Reibungskoeffizient-Gleitgeschwindigkeit) berechtigt demnach allein nicht zu der Aussage, daß mit dem Schlupf plastische Verformungen verbunden sind oder daß der Koeffizient der Gleitreibung von der Gleitgeschwindigkeit abhängig ist. Denn die Rechnung setzte ja das Hookesche Elastizitätsgesetz und das Coulombsche Reibungsgesetz voraus. Damit ist eine Vermutung bestätigt, welche Herr Geheimrat Eugen Meyer schon lange vor Kenntnis dieser Rechnung gelegentlich der Auswertung der Sachsschen Versuche geäußert hatte.

[1]) Aus den Versuchsprotokollen des Festigkeitslaboratoriums der Technischen Hochschule zu Berlin.

Die beträchtlichen numerischen Abweichungen bedürfen jedoch noch einer Klärung, zu welcher geeignete Experimente wesentlich beitragen können. Abgesehen von dem Einfluß zu grober Oberflächenrauhigkeit, von den unbegrenzt großen Verzerrungsgeschwindigkeiten in den Gebietsgrenzen der Berührungsfläche (vergl. Abb. 17, Kurven für E), die sich aus der Vernachlässigung der Massenkräfte ergeben, und abgesehen von der Anwendung des Problems ebener Verzerrungen auf Zylinder von verhältnismäßig geringer Länge sind im wesentlichen zwei Voraussetzungen der Rechnung auf ihre physikalische Zulässigkeit zu prüfen: die des wesentlich elastischen Rollens und die des Coulombschen Reibungsgesetzes. In beiden Fällen wird man auf die Theorie der Reibung zurückgeführt, denn die Rechnung liefert als größte Schubspannung bei Jahn $\tau_{max} = 0{,}373 \cdot p_0 = 1090\ \mathrm{kg/cm^{-2}}$, bei Sachs $\tau_{max} = 0{,}475 \cdot p_0 = 553\ \mathrm{kg/cm^{-2}}$, also Werte unterhalb der Elastizitätsgrenze (besonders nach wiederholter Beanspruchung). Wenn also überhaupt plastische Verformung eintritt, so kann diese nur eine Wirkung der Reibung sein. Die Vorstellung einer laminar strömenden plastischen Grenzschicht zwischen der Druckfläche und einem elastischen Kern der Scheibe würde hier vermutlich ebenso zu einer Vergrößerung des Rechnungsergebnisses für den Schlupf führen wie die Annahme, daß die Reibung mit der Gleitgeschwindigkeit von Null ab wächst und an Stelle des Haftgebietes nur eine Haftlinie existiert. Um so merkwürdiger ist die erwähnte Uebereinstimmung der Formen nach obiger Rechnung und nach den Versuchen.

Zusammenfassung. Der Schlupf beim Rollen zweier Scheiben aufeinander wird in »Gleitschlupf« und »Formänderungsschlupf« zerlegt, indem seine Beziehungen zur Deformation der Scheiben aufgestellt werden. Die Berührungsfläche wird in »Haftgebiet« und »Gleitgebiet« eingeteilt. Die Berechnung der elastischen Deformation der Scheiben durch Einzelkräfte liefert die Einflußfunktionen zur Aufstellung von Integralgleichungen, welche die in der Berührungsfläche verteilte Normal- und Tangentialbelastung den Randbedingungen unterwerfen. Eine Lösung für den Fall gleicher Elastizitätskonstanten der beiden Scheiben ergibt für die Größe der Berührungsfläche und die Verteilung der Normalspannungen in ihr bei Mitwirkung der Reibung dieselben Beziehungen wie die Hertzsche Theorie reibungsfreier Berührung. Auch die Gestalt der Berührungsfläche und ihre Symmetrie zur Zentralen ist im wesentlichen von der Reibung unbeeinflußt. Für die Einteilung kommt praktisch nur ein Haftgebiet an der Auflaufseite und ein Gleitgebiet an der Ablaufseite in Frage, und die Grenze zwischen beiden Gebieten entfernt sich bei Steigerung der Tangentialkraft immer mehr von der Ablaufseite. Die Materialbeanspruchung wird durch die Reibung stark vergrößert. Der relative Energieverlust ist nicht identisch mit dem Schlupf. Die Schlupfkurven (Schlupf-Umfangskraft) sind etwa parabolisch, also ähnlich experimentell gefundenen Kurven (aber mit numerischen Abweichungen!) und ähnlich den Festigkeitskurven (Dehnung-Spannung) oder denen der Gleitreibung (Gleitgeschwindigkeit-Gleitreibungskoeffizient), obgleich der Rechnung das Hookesche Elastizitätsgesetz und das Coulombsche Reibungsgesetz zugrunde liegen.

Berlin, den 26. Februar 1926. 695

Über die Gliederung ebener Fachwerke.

Von **H. POLLACZEK-GEIRINGER** in Berlin.

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Berlin.)

Um in der Ebene die gegenseitige Lage von k beliebigen Punkten durch Angabe geeigneter Abstände irgend zweier unter ihnen eindeutig zu bestimmen, sind mindestens $(2k-3)$ Abstände anzugeben. Denn k Punkte in der Ebene haben $2k$ Koordinaten und durch drei skalare Zahlen wird ein ebenes Koordinatensystem festgelegt. Geht man z. B. von drei Punkten 1, 2, 3 mit den Entfernungen r_{12}, r_{13}, r_{23}, aus und schließt an diese weitere Punkte 4. 5, ... k dadurch an, daß man jedesmal je zwei Entfernungen gegen bereits festgelegte Punkte angibt, so gelangt man zu einem speziellen System von $(2k-3)$ Entfernungen, das die Aufgabe löst. Daß eine ganz beliebige Auswahl von $(2k-3)$ Abständen sie nicht löst, sieht man sofort, da, wenn $k > 5$, es möglich ist, $(2k-3)$ Entfernungen so zu wählen, daß ein Punkt noch ganz frei bleibt. Bei einem dreidimensionalen System von Punkten gelten dieselben Ueberlegungen, wenn an Stelle von $(2k-3)$ der Ausdruck $(3k-6)$ gesetzt wird.

Die hier besprochene geometrische Aufgabe tritt in der Baumechanik in der Form auf, daß s starre Stäbe gelenkig so mit einander zu verknüpfen sind, daß ein im Ganzen starres Gebilde entsteht. Greifen an den k Knotenpunkten eines solchen Gebildes, — das man Fachwerk nennt, — Kräfte an, so ergeben die Gleichgewichtsbedingungen ein System von $2k$ linearen inhomogenen Gleichungen (den k Knotenpunkten entsprechend) mit s unbekannten Stabkräften (den s vorhandenen Stäben gemäß); unter diesen $2k$ Gleichungen sind aber nur $2k-3$ voneinander unabhängig. Ist $s=2k-3$, so heißt das Fachwerk ein statisch bestimmtes, und es ist im allgemeinen möglich, die unbekannten Stabspannungen wirklich zu bestimmen.

In Verfolgung dieser Aufgabe kam man bald auf solche Fachwerkgebilde, bei denen trotz statischer Bestimmtheit die Auflösung der Gleichungen keine endlichen Stabkräfte ergab; das ist der Fall verschwindender Determinante. Föppl[1]) hat gefunden, daß dieser Fall (Nicht-Lösbarkeit der Spannungsgleichungen) zusammenfällt mit der sogenannten Beweglichkeit des Systems. Beweglichkeit heißt dabei nichts anderes, als daß es bei Festhaltung der gegebenen s Entfernungen — der s vorhandenen Stäbe — zu der ursprünglichen Figur noch eine endlich oder infinitesimal verschiedene Konfiguration gibt. Läßt man die Indices i, j alle jene Zahlenpaare durchlaufen, zwischen denen die Entfernungen festgelegt sind, so unterliegen die Koordinaten den Gleichungen:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = r_{ij}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Für die infinitesimalen Verschiebungen der Koordinaten dx_i, dy_i folgen aus der Bedingung, daß die s Entfernungeu konstant bleiben, die Gleichungen:

$$(x_i - x_j)(dx_i - dx_j) + (y_i - y_j)(dy_i - dy_j) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Das Fachwerk heißt beweglich, wenn dieses System nach Nullsetzen von drei beliebigen Verschiebungen eine nicht verschwindende Lösung in den übrigen $(2k-3)$ unbekannten Verrückungen besitzt, d. h. im Falle $s=2k-3$, wenn die Determinante des Systems verschwindet. Der Föpplsche Satz ist darin begründet, daß die linke Seite des Systems der Spannungsgleichungen aus dem System (b) durch Vertauschung der Zeilen und der Kolonnen hervorgeht. Ein Ausnahmefachwerk bei dem das Spannungsproblem keine Lösung besitzt und das eine — wenigstens infinitesimale — Beweglichkeit aufweist, liegt also vor, wenn der Rang der Matrix von (b) kleiner ist als $(2k-3)$; ist er gleich $(2k-3)$, so heißt das Fachwerk unbeweglich oder starr[2]).

Die vorliegende Arbeit geht von der Tatsache aus, daß es zweierlei Arten von Ausnahmefachwerken gibt. Ein Sechseck mit seinen drei Hauptdiagonalen (Abb. 1) ($k=6$, $s=9$) wird, wie H. Müller-Breslau[3]) gezeigt hat, dann und nur dann zu einem Ausnahmefachwerk, wenn die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Hier ist die Beweglichkeit oder die Nicht-Lösbarkeit des Spannungsproblems in der speziellen gegenseitigen Lage der Knotenpunkte begründet. Schließt man aber (Abb. 2) an ein Viereck mit zwei Diagonalen einen fünften Knoten durch einen Stab an ($k=5$, $s=7$), so liegt eine Beweglichkeit vor, die in der Gliederung oder Struktur begründet ist, d. h., die bestehen bleibt, wie immer man die fünf Punkte wählt. Analytisch kommt dieser Unterschied darin zum Ausdruck, daß im ersten Fall die Determinante des Gleichungssystems — sei es des Systems der Spannungs- oder der Verschiebungsgleichungen — infolge der besonderen Werte der Koordinaten, die in die Elemente der Determinante eingehen, verschwindet, im zweiten Falle aber identisch, bei jeder Wahl dieser Koordinaten. Es ist eine für die Fachwerklehre sehr wichtige Frage, diejenigen Fachwerke — wir wollen sie brauchbare nennen — zu kennzeichnen, die nicht schon ihrer Gliederung gemäß zu den Ausnahmefachwerken gehören.

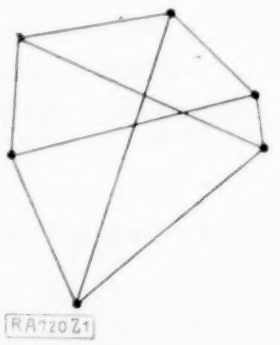


Abb. 1.

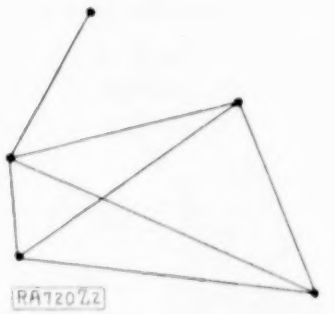


Abb. 2.

[1]) A. Föppl, Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880, S. 36.

[2]) Das Studium der Ausnahmefälle geht im wesentlichen schon auf Möbius zurück. (Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837, 4. Kap.) Die allgemeine Untersuchung derselben und eine wichtige geometrische Charakterisierung verdankt man O. Mohr (Civiling (2) 31; 1885, pag. 289.)

[3]) H. Müller-Breslau, Statik der Baukonstruktionen. 2. Aufl. 1887, Bd. I, S. 208.

Für den Fall einer ebenen Fachwerksfigur beweisen wir in der vorliegenden Arbeit den folgenden einfachen Satz:

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Fachwerk von k Knoten und $(2k-3)$ Stäben brauchbar sei, ist, daß es kein Teilsystem von l Punkten $(4 \leqq l < k)$ enthält, die durch mehr als $(2l-3)$ »innere« Stäbe mit einander verbunden sind.

Die Ableitung dieses Satzes und verschiedene Anwendungen — auch auf ebene Mechanismen — bilden den Gegenstand dieser Arbeit. Gegenüber einem von Frobenius[1]) herrührenden Satz über das identische Verschwinden von Determinanten, bei denen ein Teil der Elemente Nullen sind und die als Funktion der übrigen betrachtet werden, weist unsere Aufgabe erheblich größere Schwierigkeiten deshalb auf, weil die variablen Elemente in unserem Fall nicht voneinander unabhängig sind. Der Beweis gelingt durch eine Folge geometrischer Ueberlegungen, in denen von verschiedenen Resultaten der Fachwerktheorie Gebrauch gemacht wird.

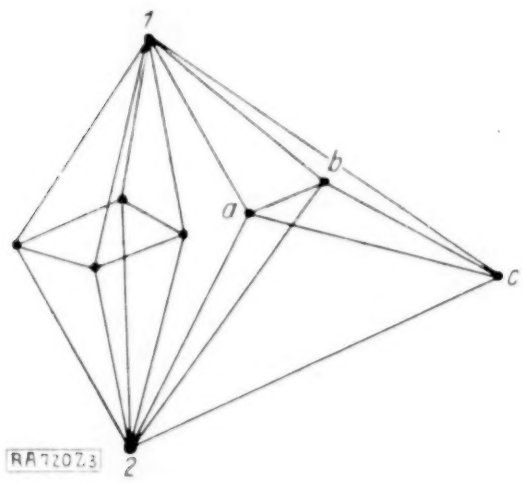


Abb. 3.

Im Raume gilt der entsprechende Satz nicht. Zwar ist es dort noch immer für ein k-punktiges Fachwerk von $(3k-6)$-Stäben eine notwendige Bedingung, daß kein Teilsystem von l Punkten mit mehr als $(3l-6)$ inneren Stäben existieren darf, aber diese Bedingung ist nicht mehr hinreichend. Schließt man an zwei beliebige, nicht durch einen Stab verbundene Punkte — sie mögen 1 und 2 heißen — eines brauchbaren statisch bestimmten Raumfachwerks (vgl. Abb. 3) ein n-Eck $(n \geqq 3)$ $a, b, c, \ldots n$ so durch $2n$ Stäbe an, daß von jedem der n Punkte je ein Stab nach Punkt 1, einer nach Punkt 2 geht, so ist das Gesamtgebilde wieder statisch bestimmt, da n neue Punkte und $n + 2n = 3n$ neue Stäbe zu den k ursprünglichen Punkten und $(3k-6)$ ursprünglichen Stäben hinzugekommen sind; es enthält ferner, wie man leicht abzählt, kein Teilsystem mit zu viel inneren Stäben; dennoch ist das Ganze unbrauchbar, da das n-Eck $a, b, c, \ldots n$ sich um die Verbindungsgerade der Punkte 1 und 2 als Achse drehen kann.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß der Unterschied zwischen der Gliederung nach beweglichen Gebilden und gewöhnlichen Ausnahmefachwerken nicht etwa zusammenfällt mit dem Unterschied zwischen endlicher und infinitesimaler Beweglichkeit. Zwei kongruente gleichgestellte Dreiecke, deren entsprechende Ecken durch drei parallele gleich lange Stäbe verbunden sind (Abb. 4) bilden ein bekanntes Beispiel endlicher Beweglichkeit trotz brauchbarer Gliederung. Anderseits hat E. Kötter[2]) in einer bekannten Arbeit über die Möglichkeit, k Punkte durch weniger als $2k-3$ Stäbe unverschieblich zu verbinden, Beispiele gegeben (Abb. 5) ($k = 8$, $s = 12$, entsprechende Seiten der beiden ineinander geschachtelten Vierecke sind parallel), bei denen zufolge einer speziellen geometrischen Konfiguration nur infinitesimale Beweglichkeit vorhanden ist, trotzdem sogar die Stabanzahl geringer als $(2k-3)$ ist, was gewiß identisches Verschwinden der Determinante, also Unbrauchbarkeit, zur Folge hat. Dadurch, daß Kötter Systeme, die nur infinitesimale Beweglichkeit haben, als unverschieblich bezeichnet, gelangt er zu der in der Ueberschrift seiner Arbeit gegebenen Formulierung. Vom Standpunkt der Fachwerktheorie sind aber Fälle von endlicher wie auch von in-

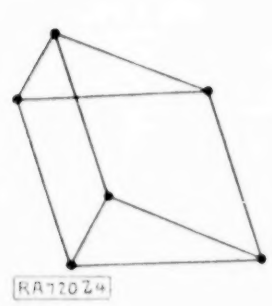


Abb. 4.

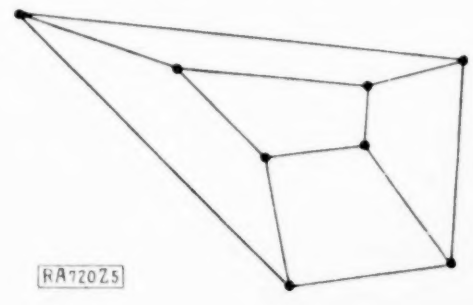


Abb. 5.

[1]) O. Frobenius »Ueber zerlegbare Determinanten«, Sitzungsber. d Berl Akademie 1917; XVIII.

[2]) E. Kötter, »Ueber die Möglichkeit n-Punkte in der Ebene oder im Raum durch weniger als $2n-3$ oder $3n-6$ Stäbe von ganz unveränderlicher Länge, unverschieblich miteinander zu verbinden«. Festschrift für H. Müller-Breslau. Leipzig 1912. — E. Kötter, »Theoretische und experimentelle Untersuchungen über eine neue Art stabiler Stabgebilde«. 2. und 3. Heft der Mitteilungen des Aachener Bezirksvereins deutscher Ingenieure 1913.

finitesimaler Beweglichkeit in gleicher Weise auszuscheiden, da beidemal das Spannungsproblem keine endlichen Lösungen besitzt.

1. Brauchbarkeit einer Gliederung. Jede Gesamtheit von k-Punkten (Knoten), zwischen denen s Verbindungsstrecken (Stäbe) gezogen sind, wollen wir als Fachwerk, genauer als freies Fachwerk oder auch als Punktgruppe oder Punktsystem bezeichnen (Abb. 6). Da sich aus k-Punkten $\binom{k}{2} = \frac{k\,(k-1)}{2}$ Punktepaare bilden lassen, so ist sicher $s \leqq \binom{k}{2}$ (in Abb. 6 ist $k = 10$, $s = 15$). Liegen die k-Punkte alle in einer Ebene, so nennen wir das Gebilde ein ebenes Fachwerk, sonst ein Raumfachwerk (bzw. ein ebenes oder räumliches Punktsystem). Das, was in der Technik als ein »gestütztes« Fachwerk bezeichnet wird, läßt sich in bekannter Weise [1]) durch Hinzufügung eines sogenannten »Erdfachwerks« auf ein freies zurückführen.

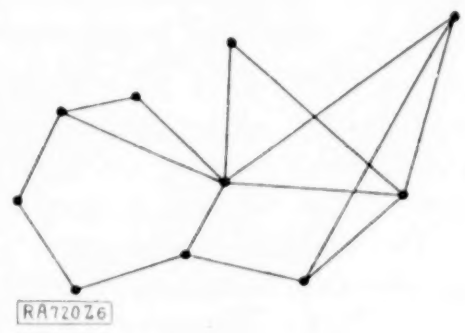


Abb. 6.

Wirkt auf ein freies Raumfachwerk von k-Knoten ein Gleichgewichtssystem von äußeren Kräften $\mathfrak{P}$, so bestehen, wenn X_i, Y_i, Z_i die rechtwinkeligen Komponenten der im i-ten Knotenpunkt angreifenden Kräfte, x_i, y_i, z_i die Koordinaten der Knotenpunkte, l_{ij} die Stablängen sind, die $3\,k$-Beziehungen:

$$\sum_j S_{ij}\frac{x_i - x_j}{l_{ij}} = X_i; \qquad \sum_j \frac{y_i - y_j}{l_{ij}} = Y_i; \qquad \sum_j \frac{z_i - z_j}{l_{ij}} = Z_i \;(i = 1, \ldots k) \quad . \quad (1),$$

die zum Ausdruck bringen, daß jeder Knoten für sich im Gleichgewicht ist. In der Ebene tritt für (1) das System:

$$\sum_j S_{ij}\frac{x_i - x_j}{l_{ij}} = X_i; \qquad \sum_j S_{ij}\frac{y_i - y_j}{l_{ij}} = Y_i \;(i = 1, \ldots k) \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Von den Gl. (1) sind nur $3\,k - 6$, von den Gl. (2) nur $2\,k - 3$ voneinander unabhängig, da zwischen den äußeren Kräften sechs bezw. drei identische Beziehungen bestehen. Ein Raumfachwerk, für das $s = 3\,k - 6$ (bezw. ein ebenes, für das $s = 2\,k - 3$) heißt statisch bestimmt. Wählt man aus den Gl (1) $3\,k - 6$ unabhängige aus, so erhält man bei einem statisch bestimmten Raumfachwerk ein System von $3\,k - 6$-Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Wir nennen es das reduzierte System von Fachwerksgleichungen und seine Determinante die Fachwerksdeterminante.

Geht man statt von dem »Spannungsproblem« (1) von dem »Verschiebungsproblem« aus, das in der Einleitung erwähnt wurde, so hat man als Ausdruck der Unveränderlichkeit der Stablängen die s Gleichungen:

$$(x_i - x_j)\;(d\,x_i - d\,x_j) + (y_i - y_j)\;(d\,y_i - d\,y_j) + (z_i - z_j)\;(d\,z_i - d\,z_j) = 0 \quad (3)$$

bzw. in der Ebene:

$$(x_i - x_j)\;(d\,x_i - d\,x_j) + (y_i - y_j)\;(d\,y_i - d\,y_j) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ist wieder $s = 3\,k - 6$ (bzw. $s = 2\,k - 3$) und setzen wir im ebenen Falle drei, im räumlichen Falle sechs Verschiebungen, zwischen denen keine lineare Relation besteht, gleich Null, so haben wir wieder ein System, in dem die Zahl der Gleichungen und Unbekannten übereinstimmt. Man erkennt ohne weiteres, daß das Koeffizientenschema von (1), wenn vorher jede Gleichung mit l_{ij} multipliziert worden ist, sich von dem Schema der Gl. (3) nur durch Vertauschung von Zeilen und Spalten unterscheidet. Die Determinante des durch Nullsetzen von sechs Verschiebungen reduzierten Systems (3) ist daher ebenfalls die oben betrachtete »Fachwerksdeterminante«.

Ist die Fachwerksdeterminante eines statisch bestimmten ebenen Fachwerks von Null verschieden, so ist das Spannungsproblem (1) bzw. (2) bei beliebigen äußeren Kräften lösbar und das zugehörige homogene System hat keine von Null verschiedene Lösung, d. h. es existiert kein System von Eigenspannungen. Zugleich gibt es keine von Null verschiedene Lösung des reduzierten Systems (3) bzw. (4), d. h. das Fachwerk verhält sich im Ganzen wie ein starrer Körper bzw. wie eine starre Scheibe. Ein solches Fachwerk nennt man in der Fachwerkslehre ein stabiles; wir wollen es als starr bezeichnen, da »stabil« in der Mechanik in anderem Sinne gebraucht

[1]) Vgl. etwa H. Müller-Breslau, »Neuere Methoden der Festigkeitslehre«. 5. Aufl., 1924, S. 13.

wird. Lassen wir hinfort die dynamische Seite der Frage ganz aus dem Spiele, so können wir die Starrheit so definieren: »Ein Fachwerk ist starr, wenn es keine ihm unendlich benachbarte Figur gibt, die die gleiche Gliederung und die gleichen Stablängen hat, ohne der ursprünglich gegebenen kongruent zu sein«. Hierbei ist der Zusatz »infinitesimal« benachbart, wesentlich, da man zu einem Gebilde, das nach unserer Definition starr ist, im allgemeinen durch »Umklappung« ein nicht kongruentes herstellen kann.

Ein Fachwerk, das nicht starr ist, heißt beweglich. Wir wollen sagen, es besitze eine μ-fache Beweglichkeit, wenn es μ linear unabhängige infinitesimale Bewegungen zuläßt, d. h. daß das System (3) oder (4) μ linear voneinander unabhängige Lösungen aufweist. Algebraisch bedeutet das, wenn r den Rang des Gleichungssystems (1) oder (3), bzw. (2) oder (4) bezeichnet:

$$\mu = 3k - 6 - r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5) \qquad \text{oder} \qquad \mu = 2k - 3 - r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Matrix eines statisch bestimmten starren Fachwerks besitzt den Rang $r = 3k - 6$ (bzw. $r = 2k - 3$), so daß $\mu = 0$. Sind in dem Fachwerk um l Stäbe weniger als $3k - 6$ (bzw. $2k - 3$) vorhanden, ist es also nicht statisch bestimmt, so ist, da der Rang r nicht größer als die Stabanzahl s sein kann, $\mu \geq l$. Ein Fachwerk, das weniger Stäbe hat als ein statisch bestimmtes von der gleichen Knotenzahl, ist also immer beweglich [1]).

Unter Struktur oder Gliederung eines Fachwerks versteht man die Angabe der Anzahl k seiner Knoten, sowie die Angabe jener Punktepaare, die durch Stäbe verbunden sind. Die Gliederung eines Fachwerks ist also durch eine Zahlentabelle gegeben, z. B. für die in Abb. 7 dargestellten ebenen Fachwerke durch:

$k = 6$; (12), (23), (34), (14), (13), (24), (36), (56), (45) . . (a)

$k = 6$; (12), (23), (34), (45), (56), (61), (14), (25), (36) . . (b).

In (a) ist zwar statische Bestimmtheit $k = 6$, $s = 9$ vorhanden, aber die Verteilung der Stäbe ist eine derartige, daß das Fachwerk sicher nicht starr ist. Denn das Gelenkviereck 3, 4, 5, 6 läßt eine Bewegung zu. Wie immer sechs Punkte in einer Ebene angeordnet werden, solange die Verbindungen so gewählt werden wie in Abb. 7a, ist das Fachwerk stets beweglich. Hingegen ist (7b) ein Fachwerk ($k = 6$, $s = 9$), bei dem sich aus der Gliederung allein noch nicht entnehmen läßt, ob es beweglich ist oder nicht. Man weiß, daß ein solches Sechseck mit drei Diagonalen dann und nur dann eine (infinitesimale) Beweglichkeit besitzt, wenn die sechs Ecken auf einem Kegelschnitt liegen [2]). Wenn man in beiden Fällen $dx_1 = dy_1 = dx_2 = 0$ setzt, so lauten die Fachwerksdeterminanten:

$$\begin{array}{|cccccccccc|}
y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_3 - y_3 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 - y_4 & 0 & 0 & x_4 - x_2 & y_4 - y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_5 & y_4 - y_5 & x_5 - x_4 & y_5 - y_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 - x_6 & y_5 - y_6 & x_6 - x_5 & y_6 - y_5 \\
0 & x_3 - x_6 & y_3 - y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 - x_3 & y_6 - y_3
\end{array}$$

und:

$$\begin{array}{|cccccccccc|}
y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_5 & y_4 - y_5 & x_5 - x_4 & y_5 - y_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 - x_6 & y_5 - y_6 & x_6 - x_5 & y_6 - y_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 - x_1 & y_6 - y_1 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 - y_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 - x_4 & y_5 - y_2 & 0 & 0 \\
0 & x_3 - x_6 & y_3 - y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 - x_3 & y_6 - y_3
\end{array}$$

[1]) Dagegen vergl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten von E. Kötter.

[2]) Vergl. Fußnote [3]), S. 59.

Die erste dieser Determinanten ist (wie man bei Entwicklung nach den aus den vier letzten Spalten gebildeten vierreihigen Minoren sieht), bei jeder Wahl der Koordinaten gleich Null. Setzen wir die zweite gleich Null, so drückt das die Bedingung aus, daß die Punkte 1 bis 6 auf einem Kegelschnitt liegen. Allgemein können wir sagen: Es gibt Gliederungen, deren sämtliche Realisierungen unstarr sind, und es gibt solche, die starre und unstarre Realisierungen besitzen; Gliederungen, welche nur durch starre Fachwerke realisiert werden, gibt es im allgemeinen nicht; stets erhält man durch Nullsetzen der Fachwerksdeterminante eine Beziehung zwischen den Koordinaten der k Punkte, welche bei Festhalten von $(k-1)$ Punkten eine Gleichung für den k-ten Punkt, die Gleichung des gefährlichen Orts dieses Knotens ergibt [1]).

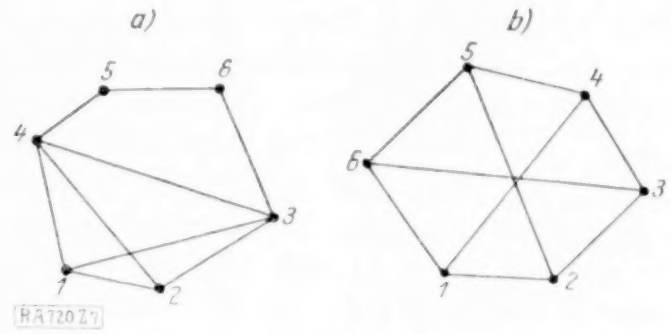


Abb. 7.

Wir wollen eine Gliederung brauchbar nennen, wenn sie mindestens eine Realisierung durch ein starres Fachwerk besitzt, sonst unbrauchbar. Der Kürze halber wollen wir auch von brauchbaren oder unbrauchbaren Fachwerken sprechen, je nachdem ob ihre Gliederung eine brauchbare oder unbrauchbare ist. Algebraisch ist die Aufgabe, die wir untersuchen wollen, im ebenen Falle so zu formulieren: Zu einer Gliederung, die durch $s = 2k - 3$ Paare der Zahlen $1 \ldots k$, nähmlich $\alpha_1 \beta_1, \ldots \alpha_s \beta_s$ gegeben ist, bilden wir eine Matrix aus $2k$ Spalten und s Zeilen, indem wir in die i-te Zeile an die Stelle mit dem Index

$$2\alpha_i - 1, \qquad 2\alpha_i, \qquad 2\beta_i - 1, \qquad 2\beta_i$$

die Ausdrücke

$$x_{\alpha i} - x_{\beta i}, \quad y_{\alpha i} - y_{\beta i}, \quad x_{\beta i} - x_{\alpha i}, \quad y_{\beta i} - y_{\alpha i}$$

und an alle andern Stellen Nullen setzen. Die Gliederung heißt dann und nur dann brauchbar, wenn es irgend ein Wertesystem $x_1 y_1, \ldots x_k y_k$ gibt, für welches die Matrix den Rang s hat. Im räumlichen Falle mit $s = 3k - 6$ hat die Matrix von s Zeilen $3k$ Spalten und es stehen in der $i$ten Zeile an der Stelle mit dem Index:

$$3\alpha_i - 2, \qquad 3\alpha_i - 1, \qquad 3\alpha_i, \qquad 3\beta_i - 2, \qquad 3\beta_i - 1, \qquad 3\beta_i$$

die Ausdrücke

$$x_{\alpha i} - x_{\beta i}, \quad y_{\alpha i} - y_{\beta i}, \quad z_{\alpha i} - z_{\beta i}, \quad x_{\beta i} - x_{\alpha i}, \quad y_{\beta i} - y_{\alpha i}, \quad z_{\beta i} - z_{\alpha i}$$

und sonst überall Nullen. Gefragt ist wieder, bei welcher Auswahl $\alpha_i \beta_i$ der Rang für alle Werte x_i, y_i, z_i niedriger als s ist. Offenbar liegt die Unterscheidung der Fachwerke in brauchbare und unbrauchbare tiefer als die zumeist vorgenommene in starre und unstarre. Statt wie üblich für ein gegebenes Fachwerk durch Untersuchen der Determinante oder durch Ansetzen des Spannungsproblems für eine allgemeine Belastung die Frage der Starrheit zu entscheiden, ist es zweckmäßig, vor allem die Brauchbarkeit seiner Gliederung zu untersuchen, und falls erstere sich ergibt, sodann erst die Spannungen wirklich zu berechnen.

2. Formulierung des Hauptsatzes. Ein ebenes Fachwerk von k Knoten, für das wir auch kurz F_k schreiben werden, besitzt die richtige Anzahl von Stäben oder auch es ist komplett [2]), wenn für die Anzahl $s(k)$ seiner Stäbe $s(k) = 2k - 3$ gilt $k \geq 2$. Besitzt es um ν Stäbe zu wenig, so sagen wir, es fehlen ν Stäbe oder auch, es besitze ν nominelle Freiheitsgrade. Ein System, dem ν Stäbe fehlen, hat auch mindestens ν wirkliche Freiheitsgrade (vergl. S. 62), da die Matrix der Gl. (4) nur $2k - 3 - \nu$ Zeilen besitzt, also sicher höchstens den Rang $2k - 3 - \nu$ haben kann. Wir schreiben für ein F_k, dem ν Stäbe fehlen, kurz $F_k^{(\nu)}$.

Wir müssen auch Teilsysteme der k Knoten eines $F_k^{(\nu)}$ betrachten. Etwa ein System von l $(l \leq k)$ Punkten S_l; dann nennen wir innere Stäbe dieses Teilsystems S_l solche, die zwischen zwei Punkten von S_l verlaufen, Außenstäbe von S_l solche, die

---

[1]) Näheres darüber vergl. etwa bei H. Liebmann »Ausnahmefachwerke und ihre Determinante«. Münch. Ber. 1920, S. 197 bis 227.

[2]) Der Ausdruck »statisch bestimmt« wird von nun an vermieden, weil wir die Anzahlbedingung auch auf Teile des Fachwerkes anwenden wollen, wobei dieser Ausdruck dann keine Bedeutung hätte.

einen der l Punkte von S_l mit einem S_l nicht angehörenden Punkt verbinden; für $l = k$ gibt es natürlich nur innere Stäbe. Wir sagen dann l Punkte eines F_k bilden ein komplettes System von Punkten oder eine komplette Punktgruppe, wenn sie $2l - 3$ innere Stäbe besitzen; wichtig ist nun der Fall, daß es in einem $F_k^{(\nu)}$ eine Gruppe von l Punkten gibt, die mehr als $2l - 3$ innere Stäbe besitzt. In dem Falle sagen wir, diese Punktgruppe bilde eine Anhäufung und das Fachwerk enthalte eine Anhäufung. Betrachten wir z. B. das Fachwerk der Abb. 7a. Das ist ein F_6 mit neun Stäben, also richtiger Gesamtanzahl. Es besitzt eine Anhäufung, denn die Gruppe der $l = 4$ Punkte 1, 2, 3, 4 besitzt sechs statt fünf innere Stäbe; Abb. 8 zeigt ein Fachwerk mit $k = 8$, $s = 13$, also im ganzen richtiger Stabanzahl. Das Fachwerk besitzt eine Anhäufung, denn die Gruppe der fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 besitzt acht statt sieben innere Stäbe, ebenso besitzt die Gruppe 1, 2, 3, 4, 5, 6 statt neun inneren Stäben zehn solche. Man sieht übrigens leicht, daß beide genannten Fachwerke unbrauchbar sind, da in dem ersten das bewegliche Viereck 3, 4, 5, 6, in dem andern das bewegliche Fünfeck 2, 4, 6, 7, 8 auftritt; das F_6 wie auch das F_8 besitzt je einen wirklichen Freiheitsgrad. Es ist noch zu bemerken, daß bei $l < 4$ Anhäufungen nicht möglich sind, da für $l = 2$ und $l = 3$ $\binom{l}{2} = 2l - 3$ ist.

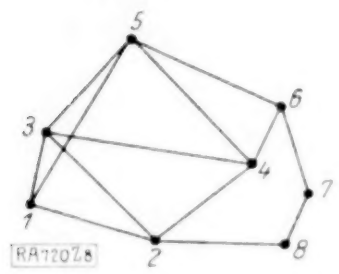


Abb. 8.

Neben den inneren Stäben eines l-punktigen Systems S_l betrachten wir noch die inneren und äußeren Stäbe zusammen. Bemerkenswert ist hier der Fall, daß diese Anzahl kleiner als $2l$ ist; dann besitzt das System S_l zu wenig äußere und innere Stäbe. Dies ist der Fall in Abb. 7a; hier ist die zwei-punktige Gruppe 5, 6 eine, die an äußeren und inneren Stäben zusammen weniger als vier, nämlich nur drei Stäbe besitzt; und in Abb. 8 gilt dasselbe für die Gruppe 7, 8. Man sieht leicht, daß die beiden erwähnten Umstände stets gekoppelt auftreten, d. h. daß der Satz gilt:

Gibt es in einem kompletten F_k eine Anhäufung von l Punkten, d. h. ein Teilsystem von $l \geqq 4$ Punkten, das um $\varrho > 0$ mehr als $2l - 3$ innere Stäbe enthält, so gibt es auch eine Gruppe von $m = k - l$ Punkten, die um ϱ weniger als $2m$ äußere und innere Stäbe enthält.

Denn die Restgruppe, die aus den k Punkten von F_k mit Ausnahme der l Punkte von S_l besteht, besitzt $k - l = m$ Punkte und ihre äußeren und inneren Stäbe zusammen sind: Alle Stäbe des Fachwerkes bis auf die inneren Stäbe der S_l also:

$$(2k - 3) - (2l - 3 + \varrho) = 2(k - l) - \varrho = 2m - \varrho .$$

Wir können jetzt unseren Hauptsatz aussprechen: Nicht nur hat das Auftreten einer Anhäufung bei kompletten Fachwerken Unbrauchbarkeit der Gliederung zur Folge — dies ist sehr leicht zu sehen und gilt auch im Raum — sondern auch umgekehrt ist die Anhäufung das einzige Vorkommnis, das bei kompletten ebenen Fachwerken Unbrauchbarkeit hervorruft; d. h. jedes komplette unbrauchbare F_k besitzt notwendig eine Anhäufung, oder auch:

Hauptsatz: Jedes ebene komplette anhäufungslose F_k ist brauchbar.

Nehmen wir die triviale Umkehrung dazu, so können wir auch sagen:

Ein komplettes ebenes F_k ist dann und nur dann brauchbar, wenn es anhäufungsfrei ist.

Dieser Satz, dessen Gültigkeit durchaus auf die Ebene beschränkt ist, gibt dort das gewünschte einfache, rein abzählende Kriterium für Brauchbarkeit. Man hat also bloß Gruppen von l Punkten $k > l \geqq 4$ zu bilden und zuzusehen, ob sich eine findet, die mehr als $2l - 3$ innere Stäbe enthält. Findet sich keine, dann und nur dann ist das vorgelegte F_k brauchbar.

3. Beweis im einfachsten Fall. Wir beweisen den Hauptsatz durch vollständige Induktion, d. h. wir zeigen ihn für ein Fachwerk von α Knoten, unter der Annahme, daß er für jedes Fachwerk $F_{\alpha-1}$ erwiesen ist. Diese Annahme ist gestattet, da der Satz für $\alpha = 3$ richtig ist, denn ein komplettes F_3 hat offenbar die Gliederung eines Dreiecks und ist als solches brauchbar.

Beim Beweis sind drei Fälle zu unterscheiden, von denen zwei sogleich erledigt sind, der dritte genauere Betrachtungen erfordert. Wir gehen davon aus, daß es be-

kanntlich, da $\frac{4k}{2} = 2k > 2k - 3$ ist, kein komplettes ebenes Fachwerk geben kann, das lauter vier- oder mehr-stäbige Knoten besäße. Es besitzt also jedes komplette ebene Fachwerk mindestens entweder:

1. einen 0-stäbigen oder 1-stäbigen, oder
2. einen 2-stäbigen, oder
3. einen 3-stäbigen Knoten.

Wir werden ferner davon Gebrauch machen, daß man durch Abbrechen eines Knotens, d. h. indem man sich aus der Fachwerksfigur den betreffenden Knoten mit samt allen von ihm ausgehenden Stäben entfernt denkt, aus einem F_α stets ein $F_{\alpha-1}$ gewinnt, usf. Wir unterscheiden nun beim Beweis die eben angeführten drei Fälle.

1. F_α besitzt einen null-stäbigen oder ein-stäbigen Knoten; er heiße α (Abb. 9). Dieser Fall ist von vornherein auszuschließen, da F_α voraussetzungsgemäß komplett und anhäufungslos ist. Denn das Teilsystem, das aus den $(\alpha - 1)$ Knoten von F_α mit Ausnahme des Knotens α besteht, besäße im Falle eines null-stäbigen Knotens $2\alpha - 3$, im Falle eines ein-stäbigen $(2\alpha - 3) - 1 = 2\alpha - 4$ innere Stäbe, gegenüber der richtigen Anzahl, die gleich $2(\alpha - 1) - 3 = 2\alpha - 5$ wäre; daher besäße F_α eine Anhäufung, entgegen der Voraussetzung.

2. F_α besitzt einen zwei-stäbigen Knoten; er heiße α. Die zwei Punkte, an die er befestigt ist, mögen 1 und 2 heißen (Abb. 10). Wir brechen ihn ab. Es entsteht ein komplettes anhäufungsloses $F_{\alpha-1}$; denn dieses hat $(\alpha - 1)$ Knoten und $(2\alpha - 3) - 2 = 2(\alpha - 1) - 3$ Stäbe, ist also wieder komplett; es ist aber auch anhäufungslos, ebenso wie F_α. Denn besäße $F_{\alpha-1}$ eine Anhäufung, so könnte diese ja durch den Vorgang des Anhängens von α nicht verloren gehen, da Anhäufung eine Eigenschaft der inneren Stäbe eines Punktsystems ist und daher durch Anhängen beliebig vieler und beliebig vielstäbiger Knoten nicht zerstört werden kann. Da also $F_{\alpha-1}$ komplett und anhäufungslos ist, ist es nach Voraussetzung brauchbar. Da $F_{\alpha-1}$ brauchbar ist, gibt es nach der Definition der Brauchbarkeit ein starres Fachwerk $\bar{F}_{\alpha-1}$, das mit $F_{\alpha-1}$ gleichgegliedert ist. Weiter ist es bekannt (folgt sofort aus dem S. S. S. Kongruenzsatz der Dreiecke), daß man stets aus einem starren $\bar{F}_{\alpha-1}$ ein starres $\bar{F}_\alpha$ erhält, wenn man an zwei beliebige Knoten von $\bar{F}_{\alpha-1}$ einen neuen zwei-stäbigen Knoten anhängt, der bloß mit den beiden nicht in gerader Linie liegt. Wir hängen also an die zwei Knoten 1 und 2 von $\bar{F}_{\alpha-1}$ einen zwei-stäbigen Knoten α an, der nicht auf der Verbindungs-Geraden $1 - 2$ liegt; dann erhalten wir ein $\bar{F}_\alpha$, das starr ist. Es ist mit dem gegebenen F_α gleich gegliedert, daher ist dieses brauchbar.

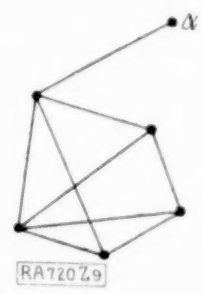


Abb. 9.

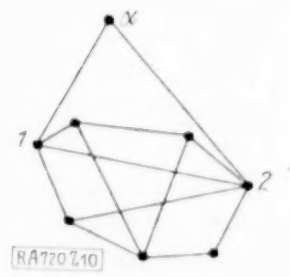


Abb. 10.

Dieser Beweis war so einfach, weil die beiden wesentlichen Schritte unmittelbar ausführbar waren. Wir konnten a) von dem gegebenen kompletten anhäufungslosen F_α sofort zu einem kompletten anhäufungslosen $F_{\alpha-1}$ kommen, b) von dem starren $\bar{F}_{\alpha-1}$ zu einem starren mit F_α gleichgegliederten $\bar{F}_\alpha$ zurückkehren. Beide Schlüsse sind im allgemeinen Fall nicht so selbstverständlich, sondern erfordern Hilfssätze, die wir jetzt angeben müssen.

4. Kombinatorischer Hilfssatz. Wir führen zunächst zwei einfache neue Definitionen ein, nämlich die von Summe und Durchschnitt zweier Teilsysteme S_1 und S_2 eines Fachwerkes; d. h. wir betrachten (vergl. Abb. 11) in einem Punktsystem von k Punkten und s Stäben (s kann gleich $2k - 3$ sein oder auch kleiner) ein System von k_1 Punkten S_1 mit seinen inneren Stäben und ein System von k_2 Punkten S_2 mit seinen inneren Stäben. Es können die k_1 und k_2 Punkte teilweise zusammenfallen (z. B. $S_1 = 4, 6, 7, 11$; $S_2 = 4, 5, 6, 7$) oder auch gar keine Punkte gemeinsam haben (z. B. $S_1 = 1, 2, 3$;

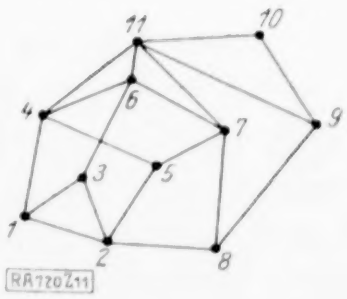


Abb. 11.

$\bar{S}_2 = S_2 = 4, 5, 6, 7$). Man versteht unter der Summe S_{12} zweier solcher Punktsysteme das Punktsystem, das aus allen Punkten besteht, die entweder S_1 oder S_2 angehören und aus allen inneren Stäben dieses Systems. Wenn — wie oben — S_1 aus den Punkten 4, 6, 7, 11 und deren fünf inneren Stäben (4, 6), (6, 7), (11, 4), (11, 7), (11, 6) besteht und S_2 aus den Punkten 4, 5, 6, 7 und deren inneren Stäben (4, 5), (5, 7), (7, 6), (4, 6), so besteht S_{12} aus den Punkten 4, 5, 6, 7, 11 und deren inneren Stäben (4, 5), (5, 7), (7, 6), (4, 6), (4, 11), (11, 6), (11, 7). S_{12} enthält also hier nur Stäbe, die schon im S_1 oder S_2 als innere Stäbe vorkamen. Hat man aber etwa $\bar{S}_1 = 1, 2, 3$ mit den Stäben (1, 2), (1, 3), (2, 3) und $\bar{S}_2 = 4, 5, 6, 7$ mit den Stäben (4, 5), (5, 7), (7, 6), (4,6), so besteht S_{12} aus den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, mit den inneren Stäben (1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5), (5, 7), (7, 6), (4, 6), (1, 4), (3, 6), (2, 5). $\bar{S}_{12}$ enthält also außer den inneren Stäben von $\bar{S}_1$ und von $\bar{S}_2$ noch drei Stäbe, die weder im $\bar{S}_1$ noch im $\bar{S}_2$ vorkamen, nämlich (1, 4), (3, 6), (2, 5). Wir nennen Stäbe, die weder in der Gruppe S_1 noch in der Gruppe S_2 als innere Stäbe auftreten, wohl aber innere Stäbe der Summe sind, Verbindungsstäbe.

Unter dem Durchschnitt D_{12} zweier Punktgruppen S_1 und S_2 eines Fachwerks verstehen wir die Punktgruppe, die alle Punkte enthält, die sowohl S_1 wie auch S_2 angehören, und alle inneren Stäbe dieser Punktgruppe. Z. B. S_1 und S_2 haben den Durchschnitt 4, 6, 7 mit den inneren Stäben (4, 6), (6, 7); S_1 und $\bar{S}_2$ haben den Durchschnitt Null. Wenn k_1 und s_1 die Anzahl der Punkte bzw. Stäbe eines Systems S_1, k_2 und s_2 die Anzahl der Punkte bzw. Stäbe eines Systems S_2, d und s_d die Anzahl der Punkte bzw. Stäbe ihres Durchschnitts, und endlich s_v die Anzahl der Verbindungsstäbe bedeutet, so besteht die Summe S_{12} aus $(k_1 + k_2 - d)$ Punkten und $(s_1 + s_2 - s_d + s_v)$ Stäben. Kommt man überein, Verbindungsstäbe wie negative Durchschnittsstäbe zu rechnen, so kann man schreiben:

$$S_{12} = S_1 + S_2 - \bar{D}_{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

wobei $\bar{D}_{12}$ außer den Punkten und Stäben von D_{12} noch die negativ gezählten Verbindungsstäbe enthält. Ebenso gilt:

$$S_{12} \geq S_1 + S_2 - D_{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Wir können nun einen einfachen Satz zeigen, den wir zum Beweise des Hilfssatzes brauchen:

In einem anhäufungslosen $F_k^{(\nu)}$ $(\nu \geq 0)$ muß der Durchschnitt D_{12} zweier kompletter Punktgruppen S_1 und S_2, wenn er aus mindestens zwei Punkten besteht $(d \geq 2)$, selbst komplett sein; auch die Summe S_{12} ist dann komplett.

Denn es habe S_1, k_1 Punkte und $2k_1 - 3$ Stäbe, S_2 habe k_2 Punkte und $2k_2 - 3$ Stäbe; dann ist es unmöglich, daß D_{12} mehr als $(2d - 3)$ Stäbe besitzt, wegen der vorausgesetzten Anhäufungslosigkeit von $F_k^{(\nu)}$; es kann aber auch nicht weniger besitzen, denn hätte D_{12} d Punkte und $2d - 3 - \varrho$ $(\varrho \geq 1)$ Stäbe, so hätte S_{12} nach (7) $(k_1 + k_2 - d)$ Punkte und mindestens $(2k_1 - 3) + (2k_2 - 3) - (2d - 3 - \varrho) = 2(k_1 + k_2 - d) - 3 + \varrho$ Stäbe, also eine Anhäufung, was nicht sein darf. D_{12} hat also genau $2d - 3$ Stäbe; dann aber hat auch S_{12} gerade $2(k_1 + k_2 - d) - 3$ innere Stäbe, ist also gleichfalls komplett. Wir können noch hinzufügen:

Besteht der Durchschnitt D_{12} zweier kompletter Systeme S_1 und S_2 nur aus $d = 1$ oder $d = 0$ Punkten, so ist die Summe dann und nur dann komplett, wenn einer bzw. drei Verbindungsstäbe vorhanden sind.

Das folgt sofort aus den Abzählungen:

$$(2k_1 - 3) + (2k_2 - 3) + 1 = 2(k_1 + k_2 - 1) - 3$$
$$(2k_1 - 3) + (2k_2 - 3) + 3 = 2(k_1 + k_2) - 3.$$

(Wenn man Verbindunsgstäbe als negative Durchschnittsstäbe rechnet, so heißt dieser Zusatz, daß der Durchschnitt D_{12} bei $d = 1$ bzw. $= 0$ aus -1 bzw. -3 Stäben bestehen muß, damit S_{12} komplett ist; tatsächlich gibt $2d - 3$ für $d = 1$ bzw. 0 gerade -1 bzw. -3, also folgt auch hier in gewissem Sinn aus dem Komplettsein des Durchschnitts das Gleiche für die Summe.)

Wir können jetzt den Hilfssatz beweisen, der im allgemeinen Fall den Uebergang vom anhäufungslosen F_α zum anhäufungslosen $F_{\alpha-1}$ vermittelt:

Wenn es in einem anhäufungslosen $F_k^{(\nu)}$ $(\nu \geq 0)$ ein Punktetripel 1, 2, 3 gibt, so daß jedes der drei Punktepaare (1, 2), (1, 3), (2, 3) des Tripels einem kompletten System angehört, etwa (1, 2) einem S_3, (1, 3) einem S_2, (2, 3) einem S_1, so gibt es auch ein komplettes System S, dem alle drei Punkte 1, 2, 3 angehören.

Der Satz ist natürlich trivial, wenn das Gesamtfachwerk selbst komplett ist, $\nu = 0$. Es ist wichtig zu überlegen, daß die kompletten Systeme S_i $(i = 1, 2, 3)$ auch zum Teil oder jedes bloß aus zwei Punkten mit Stab bestehen können, z. B. S_1 = dem Stab (2, 3), denn in der Ebene sind ja zwei Punkte mit Stab dazwischen ein komplettes System; dieser Fall ist also nicht gesondert zu betrachten. Es sind beim Beweise zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

a) Irgend zwei der Systeme, etwa S_1 und S_2 haben einen Durchschnitt D_{12} von $d \geq 2$ Punkten; dann ist (vgl. S. 66) D_{12} notwendig komplett, daher muß auch S_{12} komplett sein und da S_{12} sicher alle drei Punkte 1, 2, 3 enthält, so ist das gesuchte $S = S_{12}$.

b) Keine zwei der Systeme S_i $(i = 1, 2, 3)$ haben einen Durchschnitt von $d \geq 2$ Punkten; dann bilden wir die Summe von allen dreien. Es besitzt, wenn S_i $(i = 1, 2, 3)$ k_i Punkte und $2k_i - 3$ Stäbe besitzt die Summe S_{123} aller drei Systeme $m = (k_1 + k_2 + k_3 - 3)$ Punkte. Denn je zwei der S_i haben einen und nur einen Punkt gemeinsam (z. B. S_1 und S_2 den Punkt 3), so daß bei Bildung von $S_1 + S_2 + S_3$ die drei Punkte 1, 2, 3 doppelt gezählt werden. An Stäben besitzt S_{123} aber mindestens $(2k_1 - 3) + (2k_2 - 3) + (2k_3 - 3)$ da keine zwei der S_i einen Stab gemeinsam haben. Da nun:

$$(2k_1 - 3) + (2k_2 - 3) + (2k_3 - 3) = 2(k_1 + k_2 + k_3 - 3) - 3 = 2m - 3$$

ist, so besitzt S_{123} mindestens die richtige Stabanzahl und — wegen der vorausgesetzten Anhäufungslosigkeit — auch nicht mehr, ist also komplett. S_{123} ist also das gesuchte komplette S. Auf diesem einfachen Hilfssatz beruht der Beweis. Im Raum gilt ein entsprechender Hilfssatz nicht; dies bildet dort den Ausgangspunkt großer Schwierigkeiten.

5. Kinematischer Hilfssatz. Neben dem eben erledigten Hilfssatz, der den Uebergang von einem anhäufungslosen F_k zu einem anhäufungslosen F_{k-1} vermitteln wird, benutzen wir einen zweiten Hilfssatz, der es gestattet, von einem starren kompletten F_{k-1} durch Anhängen eines drei-stäbigen Knotens zu einem starren kompletten F_k überzugehen. Beim zwei-stäbigen Knoten war das sehr einfach; beim drei-stäbigen Knoten ermöglicht den gesuchten Uebergang ein sehr bekannter Satz der Fachwerkslehre, der oft als das »zweite Bildungsgesetz« kompletter starrer Fachwerke bezeichnet wird [1]).

Aus einem starren kompletten F_{k-1} erhält man ein starres komplettes F_k wenn man einen beliebigen Stab (m, n) herausnimmt, — dies ergibt ein $F_{k-1}^{(1)}$ — und dann an drei solche Punkte 1, 2, 3 die durch Herausnahme von (m, n) eine gegenseitige Beweglichkeit erlangt haben, einen drei-stäbigen Knoten k so anhängt, das bloß k nicht auf einem gewissen Kegelschnitt dem sogenannten »gefährlichen Ort« von k, den man in $F_{k-1}^{(1)}$ einzeichnen kann, zu liegen kommt (Abb. 12).

In Abb. 12 ist F_{k-1} ein Fünfeck mit zwei Diagonalen; $(m, n) = (1, 5)$; nach seiner Herausnahme ergibt sich $F_5^{(1)}$ wir wollen an die Punkte 1, 3, 5 einen neuen Knoten $k = 6$ anhängen; zu dem Zweck zeichnen wir in $F_5^{(1)}$ seinen völlig bestimmten gefährlichen Ort ein, einen Kegelschnitt, der notwendig durch die Punkte 1, 3, 5 geht (in dem speziellen Fall der Abb. 12 ist er ein Kreis, der auch durch die Punkte 2 und 4 geht); wenn wir dann den Knoten 6 an 1, 3, 5 so anhängen, daß 6 nicht auf dem genannten Kegelschnitt K liegt, so ist das entstehende F_6 gewiß starr. Man erhält (vergl. Nr. 1) die Gleichung des gefährlichen Orts, indem man die Fachwerkdeterminante D von F_k gleich Null setzt. Hält man

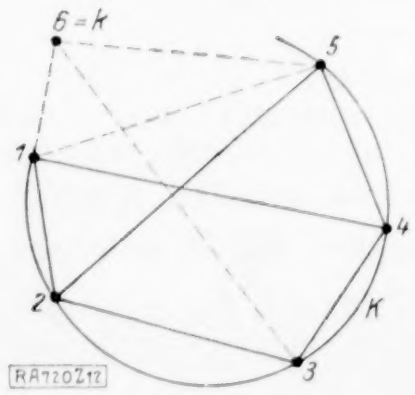


Abb. 12.

[1]) Vergl. z. B. F. Schur, Graphische Statik. Leipzig 1915, Satz 39, S. 115.

dann in der Gleichung $D = 0$ die Koordinaten aller Punkte bis auf die von Punkt k fest, so stellt in der Ebene diese Gleichung eine Kurve dar, und zwar zweiter Ordnung, wenn der variable Knoten ein drei-stäbiger ist, $(l-1)$-ter Ordnung, wenn er l-stäbig ist (vergl. l. c. [2]), S. 62). (Ganz dasselbe Resultat kann man übrigens geometrisch erhalten, wenn man den Kegelschnitt als Erzeugniss projektiver Strahlenbüschel betrachtet, allgemein die Kurve l-ter Ordnung als projektives Erzeugniss im Graßmannschen Sinne. Hier interessiert uns nur das bekannte Resultat für den drei-stäbigen Knoten.)

6. Beweis des Hauptsatzes im allgemeinen Fall. Wir betrachten wieder ein komplettes anhäufungsloses F_α und erinnern uns an die in Nr. 3 gegebene Fallunterscheidung. F_α habe keinen zwei stäbigen Knoten, sondern:

3. F_α besitzt mindestens einen drei-stäbigen Knoten. Er heiße α und sei an die drei Punkte 1, 2, 3 befestigt. Wir brechen ihn ab, es entsteht ein $F^{(1)}_{\alpha-1}$, dem ein Stab fehlt. Wir können dann — behaupte ich — stets einen Ergänzungsstab in $F^{(1)}_{\alpha-1}$ so einzieben, daß das entstehende komplette $F_{\alpha-1}$ wieder anhäufungslos ist, und wir können diesen sogar stets in irgend eines der drei Punktepaare (1, 2), (2, 3), (3, 1) einziehen. Denn es kann nicht jedes dieser drei Punktepaare im $F^{(1)}_{\alpha-1}$ einem kompletten System angehören; wäre das nämlich der Fall, d. h. gäbe es drei komplette Systeme S_i $(i = 1, 2, 3)$ (die eventuell auch Einzelstäbe sein können) so daß jedes der drei Punktepaare einem von ihnen angehört, so gäbe es, da $F^{(1)}_{\alpha-1}$ anhäufungslos ist, nach dem Hilfssatz von Nr. 4 ein komplettes System S dem alle drei Punkte 1, 2, 3 angehören; S vermehrt um den Knoten α gäbe aber eine Anhäufung. Denn wenn S allein l-Punkte und $2l-3$ Stäbe hat, so hätte $S+\alpha$ dann $l+1$ Punkte und $2l-3+3 = 2l$ Stäbe statt $2\cdot(l+1)-3 = 2l-1$, also um einen zuviel, also wäre dann im F_α eine Anhäufung gegen die Voraussetzung. Es muß also im $F^{(1)}_{\alpha-1}$ mindestens einer der drei Plätze (1, 2), (2, 3), (3, 1) »frei« sein, d. h. so beschaffen, daß es kein komplettes System gibt, dem dieses Punktepaar angehört. An dieser Stelle, die es also stets gibt, ziehen wir den Ergänzungsstab ein (in Abb. 13 strichpunktiert). Dann erzeugen wir durch dieses Einziehen gewiß keine Anhäufung, sondern erhalten ein komplettes anhäufungsloses $F_{\alpha-1}$; dieses ist nach der Voraussetzung der vollständigen Induktion brauchbar, daher gibt es ein ihm gleichgegliedertes $\bar{F}_{\alpha-1}$ das starr ist. Auf dieses wenden wir den Hilfssatz von Nr. 5 an. Wir nehmen den eben eingezogenen Ergänzungsstab heraus, dann erhalten die drei Punkte 1, 2, 3 sicher eine gegenseitige Beweglichkeit, denn es gilt allgemein:

Abb. 13.

Nimmt man aus einem kompletten starren Fachwerk einen Stab heraus, so entsteht im Ganzen eine Beweglichkeit. Speziell erhalten die zwei Punkte (m, n), zwischen denen man ihn herausgenommen hat, eine gegenseitige Beweglichkeit.

Denn eine Beweglichkeit entsteht durch Herausnahme eines Stabes sicher, da ja nachher um einen Stab zu wenig da ist, und nur eine, da mehr als eine durch Wiedereinziehen eines einzigen Stabes nicht beseitigt werden könnte. Hätten aber speziell die zwei Punkte m und n dabei keine gegenseitige Beweglichkeit erhalten, wären sie starr miteinander verbunden geblieben, so könnte man, ohne an der Beweglichkeit des Ganzen etwas zu ändern, zwischen ihnen einen Stab einziehen; d. h. es bliebe, wenn man also den Stab (m, n) wieder einzöge, noch immer eine Beweglichkeit — gegen die Voraussetzung der Starrheit des Ausgangsfachwerks. — Da also die Punkte 1, 2, 3 durch Herausnahme des zwischen ihnen befindlichen Ergänzungsstabes eine gegenseitige Beweglichkeit erhalten, so ist diese Voraussetzung des kinematischen Hilfssatzes erfüllt, und wir können an 1, 2, 3 einen drei-stäbigen Knoten α anhängen, wobei wir, wenn wir darauf achten, daß α nicht auf den in $\bar{F}^{(1)}_{\alpha-1}$ bestimmten gefährlichen Ort fällt, sicher ein starres Fachwerk $\bar{F}_\alpha$, erhalten. $\bar{F}_\alpha$ ist aber mit dem gegebenen F_α gleich gegliedert, daher ist dieses der Behauptung gemäß brauchbar. Damit ist der Haupsatz vollständig bewiesen [1]).

[1]) Man könnte auch statt den Hilfssatz von Nr. 5 zu benutzen und wie eben geschehen, die Beweglichkeit der zwei Punkte, zwischen denen ein Stab herausgenommen wird, festzustellen, direkt den folgenden Satz algebraisch beweisen: »Nimmt man aus einem kompletten brauchbaren F_{k-1} einen beliebigen Stab (m, n) heraus und hängt an die zwei Punkte m und n und an einen ganz beliebigen

7. Die Bildungsgesetze. Wir wollen in dieser Nummer die sogenannten Bildungsgesetze bzw. Reduktionsgesetze, die die kompletten starren F_k aus den kompletten starren F_{k-1} zu erzeugen bzw. jene auf diese zurückzuführen gestatten, rein abzählend ohne kinematische Begriffe formulieren. Wie bekannt, gelten die folgenden auch S. 65 bzw. 67 von uns verwendeten Sätze: »Aus einem brauchbaren F_{k-1} erhält man durch Anhängen eines zwei-stäbigen Knotens k ein brauchbares F_k; ebenso durch Herausnahme eines Stabes (m, n) und Anhängen eines drei stäbigen Knotens an drei Punkte, die durch die Herausnahme von (m, n) eine gegenseitige Beweglichkeit erlangt haben«. Wir wollen von nun an die Zusatz-Bedingungen bezüglich des »gefährlichen Orts« wie sie S. 67 gemacht wurden, weglassen und dafür von brauchbaren F_k statt von starren sprechen.) Wir haben S. 68 gesehen, daß wir speziell, stets ein brauchbares F_k erhalten, wenn wir einen Stab (m, n) herausnehmen und an diese zwei Punkte und an irgend einen beliebigen dritten Punkt des $F_{k-1}^{(1)}$ einen drei-stäbigen Knoten k anhängen. Dieser spezielle Bildungsprozeß in dem keine kinematische Bedingung mehr auftritt, liefert aber bereits, zusammen mit dem vom Anhängen eines zwei-stäbigen Knotens, alle brauchbaren F_k. Denn sei ein beliebiges brauchbares F_k vorgelegt, das keinen zwei-stäbigen Knoten hat, und bricht man den sodann gewiß vorhandenen drei-stäbigen Knoten k, der an den Knoten 1, 2, 3 hängt, ab, so besitzen in dem entstehenden Gebilde diese drei Punkte sicher eine und nur eine gegenseitige Beweglichkeit. (Denn wir können uns vorstellen, wir hätten erst den Stab $(k, 1)$ weggenommen, dadurch eine Beweglichkeit erzeugt, dann von diesem $F_k^{(1)}$ noch den zwei-stäbigen Knoten k abgebrochen, wodurch sich an der Beweglichkeit nichts ändert.) In diesem $F_{k-1}^{(1)}$ haben speziell die Punkte 1, 2, 3 sicher eine gegenseitige Beweglichkeit, denn hätten sie keine, so könnte ja die vorhandene Beweglichkeit des ganzen Gebildes durch Anhängen des drei-stäbigen Knotens k an 1, 2, 3 nicht zerstört werden. Daher können wir stets ein brauchbares F_{k-1} erhalten, wenn wir zwischen zwei gegeneinander bewegliche der drei Punkte 1, 2, 3 von $F_{k-1}^{(1)}$ einen Stab einziehen. (Ein Platz dazu muß frei sein, denn wären alle drei Punkte durch Stäbe verbunden, so könnten nicht zwei von ihnen gegeneinander beweglich sein.) Somit läßt sich umgekehrt das gegebene beliebige brauchbare komplette F_k aus einem geeigneten brauchbaren kompletten F_{k-1} durch den genannten speziellen Bildungsprozeß erhalten. Das Wesentliche ist hier, daß die beiden geschilderten Bildungsprozesse:

A) Anhängen eines zwei-stäbigen Knotens

B) Herausnahme eines Stabes und Anhängen eines drei-stäbigen Knotens an diese zwei Punkte und an einen dritten ganz beliebigen Punkt des Fachwerks

sich ohne jede Bedingung bezüglich »Beweglichkeit« beschreiben lassen, also einen anderen Charakter tragen als die üblicherweise als Bildungsgesetze bezeichneten Vorschriften.

Gleichzeitig haben wir erkannt, da durch die Prozesse A) und B) aus einem anhäufungslosen F_{k-1} nie ein F_k mit Anhäufung werden kann, — denn Anhängen eines zwei-stäbigen Knotens erzeugt gewiß keine Anhäufung und Anhängen eines drei-stäbigen Knotens an drei Punkte, zwischen denen zuvor ein Stab herausgenommen wurde, ebensowenig — und da alle kompletten brauchbaren F_k aus den kompletten brauchbaren F_{k-1} durch die Prozesse A) und B) entstehen:

Alle kompletten brauchbaren Fachwerke sind anhäufungslos.

Also ist damit die triviale Umkehrung unseres Hauptsatzes eingesehen.

Da wir jetzt wissen, daß »anhäufungslos« und »brauchbar« bei kompletten ebenen Fachwerken dasselbe ist, können wir auch die Reduktionsprozesse, die aus einem beliebigen brauchbaren kompletten F_k ein ebensolches F_{k-1} machen, rein abzählend beschreiben:

---

weiteren Knotenpunkt des so entstandenen $F_{k-1}^{(1)}$ einen drei-stäbigen Knoten k an, so erhält man ein brauchbares Fachwerk F_k.« Dieser Satz, der in unserm Zusammenhang als Spezialfall des kinematischen Hilfssatzes von Nr. 5 auftritt, ergibt sich unschwer durch Betrachtung der Fachwerksmatrix, die dem System (4) von Nr. 1 entspricht. Seine Anwendung führt direkt von dem durch Einziehen des Ergänzungs-tabes erzeugten kompletten anhäufungslosen und daher brauchbaren F_{k-1} zu dem gesuchten kompletten brauchbaren F_k.

A_1) Abbrechen eines zwei-stäbigen Knotens.

B_1) Abbrechen eines drei-stäbigen Knotens. k . . . (1, 2, 3) und Einziehen eines Ergänzungsstabes in eines der drei Punktepaare (1, 2), (1, 3), (2, 3) so, daß keine Anhäufung entsteht.

Denn da jedes brauchbare komplette Fachwerk nach der Umkehrung des Hauptsatzes anhäufungslos ist, so muß man nur den Ergänzungsstab anhäufungslos einziehen (vergl. Nr. 6), um ein anhäufungsloses, daher (nach dem Hauptsatz) brauchbares F_{k-1} zu erhalten.

Wir können also alle kompletten brauchbaren Fachwerke durch die zwei rein abzählenden Bildungsgesetze A) und B) aus dem Dreieck ableiten und umgekehrt alle diese durch die abzählenden Prozesse A_1) und B_1) auf das Dreieck zurückführen.

8. Verallgemeinerung des Hauptsatzes auf Mechanismen. Wir wollen unseren Hauptsatz noch verallgemeinern, indem wir nun auch die Gliederung von Fachwerken, die nichtkomplett sind, sondern um ν Stäbe zu wenig haben — man nennt solche meist Mechanismen — betrachten. So wie wir eine Gliederung von k Punkten und $(2k-3)$ Stäben brauchbar nannten, wenn sie eine Realisierung durch ein starres Fachwerk (also ohne eine einzige Beweglichkeit) zuließ, so wollen wir eine Gliederung von k Punkten und bloß $2k-3-\nu\,(\nu \geq 1)$ Stäben brauchbar nennen, wenn sie eine Realisierung durch ein Fachwerk zuläßt, das nicht mehr als ν Beweglichkeiten besitzt. Analytisch heißt das nach (6), daß die Matrix der Gleichungen (4), die in diesem Falle nur $s = 2k-3-\nu$ Zeilen besitzt, den Rang $r = s$ hat. Es gilt dann der folgende Satz, der für $\nu = 0$ den Hauptsatz ergibt:

Ein Gebilde $F_k^{(\nu)}\,(\nu \geq 0)$ von k Knoten und $2k-3-\nu$ Stäben hat nicht mehr als ν in der Gliederung begründete Beweglichkeiten, d. h. es ist im verallgemeinerten Sinne brauchbar, sofern es keine Anhäufung besitzt.

Dieser Satz zeigt, daß Anhäufung tatsächlich das einzige Vorkommnis ist, das bei ebenen Fachwerksgebilden Unbrauchbarkeit hervorruft. Er ergibt sich genau wie der Hauptsatz durch vollständige Induktion, wobei wir uns kürzer fassen können: Nehmen wir an, daß er für alle $F_{\alpha-1}^{(\nu)}$ bei beliebigem ν erwiesen sei, dann sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Das anhäufungslose $F_\alpha^{(\nu)}$ besitzt einen null-stäbigen Knoten, d. h. einen ganz freien Punkt; dann existiert ein $F_{\alpha-1}^{(\nu-2)}$, dem nur mehr $(\nu-2)$ Stäbe fehlen, bestehend aus allen vorher vorhandenen Knoten mit Annahme von α. Es ist noch immer anhäufungslos. Daher besitzt es nach Voraussetzung genau $(\nu-2)$ Beweglichkeiten. Vermehrt um den null-stäbigen Knoten α, besitzt das $F\alpha^{(\nu)}$ um zwei Beweglichkeiten mehr, also genau ν (vergl. Abb. 14a).

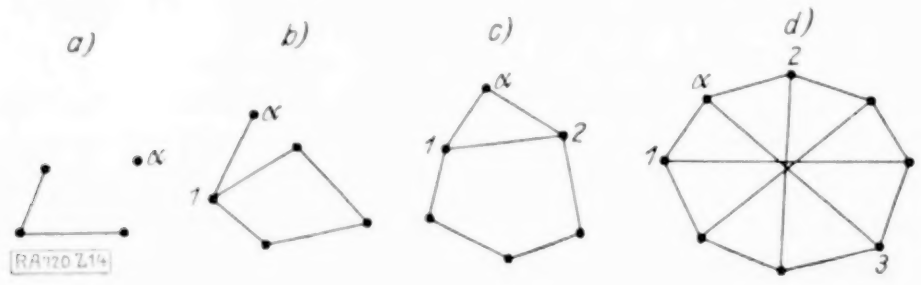


Abb. 14.

2. F_α besitzt einen ein-stäbigen Knoten (vergl. Abb. 14b); wir brechen ihn ab, es bleibt ein $F_{\alpha-1}^{(\nu-1)}$, also ein Gebilde von $(\alpha-1)$ Knoten, dem nur mehr $(\nu-1)$ Stäbe fehlen, und das noch immer anhäufungslos ist. Daher besitzt es genau $(\nu-1)$ Beweglichkeiten. Fügen wir den ein-stäbigen Knoten wieder an, so erhalten wir um eine Beweglichkeit mehr, also genau ν Beweglichkeiten.

3. Das anhäufungslose $F_\alpha^{(\nu)}$ besitzt einen zwei-stäbigen Knoten α (vergl. Abb. 14c) an 1, 2 befestigt. Wir brechen ihn ab, erhalten ein anhäufungsloses $F_{\alpha-1}^{(\nu)}$; dieses besitzt nach Voraussetzung genau ν Beweglichkeiten; durch Wiederanhängen eines zwei stäbigen Knotens α an die Punkte 1 und 2 erhalten wir ein dem gegebenen gleichgegliedertes $F_\alpha^{(\nu)}$ mit ν in der Gliederung begründeten Beweglichkeiten.

4. Das anhäufungslose $F_\alpha^{(\nu)}$ besitzt einen drei-stäbigen Knoten (vergl. Abb. 14d). Dort ist $\alpha = 8$, $s = 12 = 13-1$, also $\nu = 1$.) Wir brechen ihn ab, erhalten ein $F_{\alpha-1}^{(\nu+1)}$,

dem $(\nu+1)$ Stäbe fehlen. Wir behaupten, daß es möglich ist, einen Ergänzungsstab anhäufungslos in eines der drei Punktepaare $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$ einzuziehen. Dies ist so, denn der Hilfssatz von Nr. 4, auf dem diese Möglichkeit beruht, war ja für Gebilde, denen beliebig viel Stäbe fehlen, ausgesprochen. Gehörte also jedes der fraglichen drei Punktepaare einem kompletten System S_i an, $(i=1,2,3)$, so gäbe es in $F_{\alpha-1}^{(\nu+1)}$ ein komplettes System S, dem alle drei Punkte 1, 2, 3 angehören, daher gäbe es nach Anhängen des drei-stäbigen Knotens α eine Anhäufung im gegebenen $F_\alpha^{(\nu)}$. Da das nach Voraussetzung nicht der Fall ist, ist mindestens einer der Plätze $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,3)$ »frei«, und dort ziehen wir den Ergänzungsstab ein. Das so erhaltene $F_{\alpha-1}^{(\nu)}$ ist anhäufungslos, hat daher nach Voraussetzung genau ν Beweglichkeiten. Durch Herausnahme des Ergänzungsstabes erhält es um eine Beweglichkeit mehr, da ihm dann um einen Stab mehr fehlt, und zwar müssen speziell die zwei Punkte, zwischen denen wir ihn herausgenommen haben, dabei eine gegenseitige Beweglichkeit erlangt haben, denn wäre das nicht der Fall, so könnte ja durch Wiedereinziehen des Ergänzungsstabes zwischen ihnen die im Ganzen neu vorhandene Beweglichkeit nicht verschwinden; daher besitzen nach Herausnahme des Ergänzungsstabes die drei Punkte 1, 2, 3 mindestens eine gegenseitige Beweglichkeit. Eine Beweglichkeit zwischen ihnen wird aber durch Wiederanhängen des drei-stäbigen Knotens α zerstört. Daher erhalten wir, wie behauptet, ein dem Gegebenen gleichgegliedertes $F_\alpha^{(\nu)}$ mit genau ν Beweglichkeiten.

Wir hätten diesen Satz auch auf den Hauptsatz von Nr. 6 zurückführen können, unter Verwendung des folgenden Hilfssatzes:

In ein anhäufungsloses $F_k^{(\nu)}$, dem ν Stäbe fehlen, kann man stets ν Stäbe so einziehen, daß das entstehende F_k wieder anhäufungslos ist.

Dieser Satz geht über das soeben hier wie auch in **6** bei Einziehen des Ergänzungsstabes Benutzte hinaus, nicht so sehr weil jetzt ν Ergänzungsstäbe anhäufungslos eingezogen werden sollen und früher einer, das ist unwesentlich; aber früher wußte man, daß das $F_{\alpha-1}^{(\nu+1)}$, in das der Ergänzungsstab eingezogen werden sollte, aus einem anhäufungslosen $F_\alpha^{(\nu)}$ durch Abbrechen eines dreistäbigen Knotens entstanden war. Der eben genannte Satz gilt aber für jedes $F_k^{(\nu)}$, von dem wir bloß wissen, daß ihm ν Stäbe fehlen und es anhäufungslos ist. Wir wollen diesen Satz hier, um Raum zu sparen, nicht beweisen; er läßt sich durch Abzählungen, deren Grundlagen in den in Nr. 4 entwickelten Beziehungen liegen, einsehen. Man sieht leicht, wie mit seiner Hilfe die Verallgemeinerung des Hauptsatzes sich ergibt: Denn haben wir ein $F_\alpha^{(\nu)}$, das anhäufungslos ist und dem ν Stäbe fehlen, so ziehen wir ν Ergänzungsstäbe so ein, daß das entstehende komplette F_α noch immer anhäufungslos ist; dann ist es nach dem Hauptsatz brauchbar. Nehmen wir die ν Ergänzungsstäbe wieder heraus, so entsteht ein $F_\alpha^{(\nu)}$, das genau ν Beweglichkeiten besitzt; denn mehr als ν Beweglichkeiten könnten ja durch Wiedereinziehen der ν Ergänzungsstäbe nicht zerstört werden.

9. Zusammenhang zwischen „komplett“ und „starr“. Wir folgern schließlich aus dem verallgemeinerten Hauptsatz einen diesem im wesentlichen äquivalenten Satz, der die Einfachheit der Verhältnisse in der Ebene besonders anschaulich charakterisiert. Gegeben sei ein anhäufungsloses $F_k^{(\nu)}$ dem $\nu > 0$ Stäbe fehlen, und in dem zwei Punkte 1 und 2 starr, verbunden sind, ohne daß ein Stab zwischen ihnen ist. Das $F_k^{(\nu)}$ hat nach dem verallgemeinerten Hauptsatz genau ν Beweglichkeiten. Da die Punkte 1 und 2 starr verbunden sind, können wir einen Stab zwischen ihnen einziehen, ohne daß an der Beweglichkeit des ganzen Gebildes etwas geändert wird. Wir erhalten dann ein $F_k^{(\nu-1)}$ dem $\nu-1$ Stäbe fehlen. Da es aber noch immer ν Beweglichkeiten bezitzt, muß es nach dem verallgemeinerten Hauptsatz eine Anhäufung besitzen und zwar eine, der die Punkte 1 und 2 angehören, da die Anhäufung ja erst durch Einziehen von $(1,2)$ entstanden ist. Es gibt also im betrachteten $F_k^{(\nu-1)}$ ein System von $l \geq 4$ Punkten, darunter die Punkte 1 und 2, das gerade $(2l-3)+1$ Stäbe besitzt; nimmt man den Stab $(1,2)$ jetzt wieder weg, so erkennt man, daß es im $F_k^{(\nu)}$ ein komplettes System von l Punkten und $2l-3$ Stäben gegeben haben muß, dem die Punkte 1 und 2 angehören. Wir erkennen somit den charakteristischen Zusammenhang zwischen Starrheit und unseren abzählenden Begriffen:

Wenn in einem anhäufungslosen $F_k^{(\nu)}$, dem ν Stäbe fehlen, irgend zwei Punkte starr verbunden sind, so gibt es stets ein komplettes System, dem sie angehören.

Dieser Satz ist charakteristisch für die Ebene. Im Raum gilt er keineswegs.

10. Algebraische Interpretation des Hauptsatzes. Erinnern wir uns, daß eine Anhäufung von l Punkten (vergl. Nr. 2) für ein komplettes F_k die Existens einer Gruppe von $(k-l)$ Punkten bedeutet, die an äußeren und inneren Stäben zusammen weniger als $2(k-l)$ besitzt. Das bedeutet algebraisch, daß in der Matrix der Fachwerksgleichungen (4) eine Gruppe von $2(k-l)$ Spalten auftritt, entsprechend den genannten $(k-l)$ Punkten mit weniger als $2(k-l)$ von Null verschiedenen Zeilen (vergl. z. B. die letzten vier Spalten in der ersten Matrix auf S. 62). Das identische Verschwinden einer Fachwerkdeterminante, welches ja per definitionem Unbrauchbarkeit bedeutet, bringt also zufolge unserem Hauptsatze stets dieses spezielle Vorkommnis mit sich. D. h. es gilt der Satz:

In der Matrix von $2k-3$ Zeilen und $2k$ Kolonnen der Fachwerksgleichungen (4) verschwindet dann und nur dann keine $(2k-3)$ reihige Determinante identisch, wenn es in dieser Matrix keine Gruppe von $p\,(p < 2k-3)$ Spalten gibt, in der alle Elemente gleich Null sind, welche diese p Spalten mit mehr als $(2k-3)-p$ Zeilen gemeinsam haben.

Algebraisch sieht man übrigens am einfachsten die (bereits in Nr. 7 gezeigte) triviale Umkehrung unseres Hauptsatzes, da man sofort sieht, daß eine Determinante, die (zufolge einer Anhäufung) eine Gruppe von p Spalten der eben charakterisierten Art enthält, identisch verschwindet.

Der hier gefundene Determinantenansatz hat eine Beziehung zu einem einfacheren Satz, der sich auf das identische Verschwinden von Determinanten mit voneinander unabhängigen Elementen bezieht. Man betrachtet nämlich eine Determinante, in der — so wie bei unserer — gewisse Plätze mit Nullen besetzt sind, gewisse mit variabeln Gliedern, und fragt, wie eine solche Determinante gegliedert sein müsse, d. h. wie die Nullen verteilt und angeordnet sein müssen, damit sie identisch verschwinde. Es gilt dann ein von Frobenius (l. c. 1) gezeigter Satz, der unserem analog ist: »Eine Determinante n-ter Ordnung, deren Elemente zum Teil Nullen sind, während die übrigen unabhängige Veränderliche sind, verschwindet der Gliederung nach, d. h. identisch in den unabhängigen Veränderlichen, dann und nur dann, wenn wenigstens eine Gruppe von p Zeilen existiert, in der mehr als $n-p$ Spalten mit lauter Nullen besetzt sind.« Daß für die ebene Fachwerksdeterminante, in der die Glieder so vielfältig voneinander abhängen, ein entsprechender Satz noch immer gilt, ist der algebraische Inhalt unseres Hauptsatzes. 720

Berechnung der Biegungsschwingungszahl einer Welle, die mit mehreren Lasten behaftet ist.

Von **O. FÖPPL,** Braunschweig.

Für umlaufende Maschinen ist es wichtig, die minutliche Biegungsschwingungszahl n_k der Welle festzustellen, da die Drehzahl der Maschine zwecks Vermeidung von Resonanzerscheinungen nicht mit n_k zusammenfallen darf. Wenn mehrere Massen auf der Welle sitzen, hat man n_k bisher so berechnet, daß man die elastische Linie, die bei der Schwingung auftritt, geschätzt und nach dem Verfahren der Näherungsfolgen durch mehrfache Integration der wahren schwingungselastischen Linie angenähert hat[1]). Als erste Schätzung benutzte man gewöhnlich die statische elastische Linie, nach der sich die Welle infolge der Erdanziehung durchbiegt. Unter Benutzung der Maßstäbe kann man aus der Zeichnung die Eigenschwingungsdauer T_I ermitteln. Das Verfahren ist umständlich durch die wiederholte Konstruktion von elastischen Linien, die viel Zeichenarbeit erfordert. Im Nachfolgenden wird eine Gleichung abgeleitet, die es erlaubt, aus der statischen elastischen Linie unmittelbar mit sehr weitgehender Genauigkeit die Eigenschwingungszahl zu ermitteln.

Wir gehen von der Differentialgleichung der elastischen Linie aus:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{J E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

in der y die Durchbiegung in der Entfernung x vom linken Auflager, M das Biegungsmoment, J das Trägheitsmoment, (das ebenfalls mit x veränderlich sein kann), und E den

[1]) A. Stodola, »Die Dampfturbinen«, Springer 1922, S. 381 ff. — C. Pfleiderer, »Die Kreiselpumpen«, Springer 1924, S. 276 ff. — O. Föppl, »Grundzüge der technischen Schwingungslehre«, Springer 1923, S. 29 ff.

Elastizitätsmodul bezeichnen. Beim Fortschreiten um dx wächst M um die Scherkraft V mal dx an:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$V = E \frac{d}{dx}\left(J \frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die von der Erdanziehung herrührende Scherkraft V_g ist gleich der Auflagekraft A_g vermindert um die Summe der Gewichte links vom Schnitt:

$$\Sigma G = g \Sigma m = A_g - V_g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a)$$

$$A_g - \sum_0^x G = E \frac{d}{dx}\left(J \frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,b).$$

$\sum_0^x G$ bezieht sich auf die sämtlichen Gewichte, die auf der Welle zwischen $x = 0$ und $x = x$ sitzen (Abb. 1).

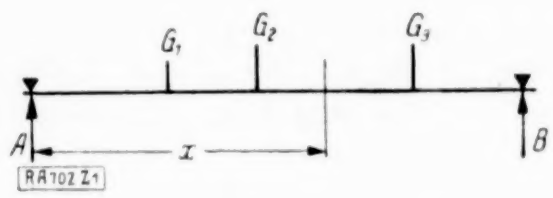


Abb. 1.

In ähnlicher Weise können wir auch die schwingungselastische Linie ableiten. Wir sehen dabei von der statischen Durchbiegung ab und bezeichnen mit y die Auslenkung der Welle, die bei der Schwingung auftritt, und die nicht nur vom Ort x, sondern auch von der Zeit t abhängt. In jedem Augenblick ist Gleichgewicht zwischen den durch die Verbiegung der Welle ausgelösten Kräften und den Beschleunigungen, die die Massen erfahren, vorhanden. Es gilt also einerseits Gl. (3), andererseits ist:

$$V - A = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Mit A ist die zeitlich veränderliche linke Auflagerkraft und mit V die veränderliche Scherkraft an der Stelle x bezeichnet. Uns interessiert die äußerste Lage, in der sich die Welle zu Beginn der Zeit ($t = 0$) befindet. Die zugehörigen Werte der Durchbiegungen und Kräfte zeichnen wir durch Beifügung eines Index »0« aus, also y_0, A_0, V_0. Andererseits heben wir die Werte, die zur Zeit $t = \frac{T_I}{4}$ gehören, die also dem Durchgang durch die Nullage entsprechen, durch Anhängen des Index »a« hervor. Es ist demnach $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ die Geschwindigkeit, die eine bestimmte Masse beim Durchgehen durch die Mittellinie hat. Wir setzen ferner voraus, daß die Schwingung sinusförmig erfolgt, daß also

$$A = A_0 \cos \frac{2\pi t}{T_I}; \qquad V = V_0 \cos \frac{2\pi t}{T_I}; \qquad y = y_0 \cos \frac{2\pi t}{T_I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Dann können wir Gl. (5) von der Endlage bis zur Mittellage, also von $t = 0$ bis $t = \frac{T_I}{4}$ integrieren und den Impuls gleich der Bewegungsgröße setzen:

$$\int_0^{T_I/4} (V - A)\, dt = (V_0 - A_0) \int_0^{T_I/4} \cos \frac{2\pi t}{T_I}\, dt = -(A_0 - V_0) \frac{T_I}{2\pi} = \Sigma m \left(\frac{dy}{dt}\right)_a \qquad (7).$$

Da wir bis $t = \frac{T_I}{4}$ integriert haben, mußten wir im letzten Ausdruck die Geschwindigkeit in der Mittellage einsetzen. Nach Gl. (6) ist

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_a = -y_0 \frac{2\pi}{T_I}\left[\sin \frac{2\pi t}{T_I}\right]^{T_I/4} = -y_0 \frac{2\pi}{T_I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Verbindung der Gleichungen (7) und (8) liefert:

$$\left(\frac{2\pi}{T_I}\right)^2 \Sigma m\, y_0 = A_0 - V_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,a).$$

In Gl. (9a) tritt die Scherkraft V_0 auf, von der die Form der schwingungselastischen Linie abhängt. Die Gleichung entspricht deshalb der ersten der Gleichungen (4) und kann wie diese zur Aufstellung der Differentialgleichung der elastischen Linie verwendet werden.

Die Gleichungen (4a) und (9a) sind wesentlich dadurch voneinander verschieden, daß im ersten Fall die Summe der Massen Σm, im zweiten die Summe der Massen multipliziert mit den zugehörigen Durchbiegungen auftreten. Die aus Gl. (4a) abgeleitete Gl. (4b) kann graphisch integriert werden. Aus Gl. (9a) erhalten wir unter Benutzung von Gl. (3):

$$A_0 - \left(\frac{2\pi}{T_I}\right)^2 \Sigma m y_0 = E \frac{d}{dx}\left(J \frac{d^2 y_0}{dx^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9b).$$

Diese Gleichung kann nicht in gleicher Weise behandelt werden wie (4b), da die Unbekannte y_0 nicht nur als zweiter Differentialquotient, sondern auch unter dem Summenzeichen auftritt. Die schwingungselastische Linie ist demnach jene statische elastische Linie, bei der die tatsächlichen Massen m durch fingierte Massen $m y_0$ ersetzt sind, zu deren Bestimmung erst die bei der Schwingung an jeder Stelle auftretende Durchbiegung bekannt sein müßte. Der Maßstab, in dem $m y_0$ aufgetragen wird, ist gleichgültig, da die Schwingungsdauer unabhängig vom Schwingungsausschlag ist. Um dem Produkt $m y_0$ die Dimension einer Masse zu geben, multiplizieren wir es mit dem Faktor α von der Dimension $\frac{1}{\text{cm}}$ und führen $\alpha \cdot m y_0$ als fingierte Massen ein. Tatsächlich sind statische und schwingungselastische Linie voneinander verschieden. Bei der letzteren tragen die Massen in der Nähe des Auflagers entsprechend der geringeren Durchbiegung weniger zur Verbiegung bei. Wir können aber doch die Durchbiegungen y_g der statischen elastischen Linie zur Berechnung der für die schwingungselastischen Linie nötigen Belastungen $\alpha \cdot m y_0$ benützen und die Schwingungsdauer für diesen angenäherten Fall mit Hilfe des Impulssatzes berechnen.

Die Summe der beiden Auflagerkräfte A_0 und B_0 ist, wenn nur die Schwingungsdauer I. Ordnung gesucht wird, gleich der Summe der fingierten Massen mal Erdbeschleunigung g:

$$A_0 + B_0 = g \alpha \Sigma (m y_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Wir nehmen an, die Ordinaten y der zwischenliegenden elastischen Linien bei der Schwingung seien verhältnisgleich den Ordinaten y_g der statischen elastischen Linie und können für eine Zwischenstellung ähnlich wie in Gl. (6) schreiben:

$$A = A_0 \cos \frac{2\pi t}{T_I}; \qquad B = B_0 \cos \frac{2\pi t}{T_I}; \qquad y = y_g \cos \frac{2\pi t}{T_I}; \qquad A + B = g \alpha \Sigma (m y) \qquad (11).$$

In der Zeit von $t = 0$ bis $t = \frac{T_I}{4}$ wird von den Auflagerkräften A und B der Impuls Z ausgeübt:

$$Z = \int_0^{T_I/4} (A + B)\, dt = \frac{T_I}{2\pi}(A_0 + B_0) = g \frac{T_I}{2\pi} \alpha \Sigma m y_g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Da A und B die einzigen äußeren Kräfte sind, ist der Impuls gleich der Bewegungsgröße, d. h. der Summe der fingierten Massen $\alpha m y_g$, jede multipliziert mit der in der Zeit von $t = 0$ bis $t = \frac{T_I}{4}$ erteilten Geschwindigkeit $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$. Unter Verwendung der 3. der Gleichungen (11) ist also:

$$g \frac{T_I}{2\pi} \alpha \Sigma (m y_g) = \alpha \Sigma m y_g \left(\frac{dy}{dt}\right)_a = \alpha \Sigma m y_g y_g \frac{2\pi}{T_I}\left[\sin \frac{2\pi t}{T_I}\right]^{T_I/4} = \frac{2\pi}{T_I} \alpha \Sigma m y_g^2 \quad (13)$$

daraus wird:

$$T_I = 2\pi \sqrt{\frac{\Sigma m y_g^2}{g \Sigma m y_g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

oder, wenn man statt der Massen m die Gewichte G, und statt der Schwingungsdauer T_I die Zahl n_k der Schwingungen in einer Minute einführt:

$$n_{kI} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \Sigma G y_g}{\Sigma G y_g^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a).$$

Da die Schwingungsweite ohne Einfluß auf die Schwingungsdauer ist, ist der Faktor α heraus gefallen.

Die Gl. (14) wäre streng richtig, wenn die Verteilung der Massen im Verhältnis der Durchbiegungen geändert wäre. Da die Durchbiegung unter einer Masse, d. h. die Schwingungsweite beliebig angenommen werden kann, muß Gl. (14) streng zutreffen für den Fall, daß nur eine Masse auf der Welle sitzt. In diesem Fall können die Summen-

zeichen weggelassen werden und Gl. (14) geht in die bekannte Form für die Schwingungsdauer einer Welle mit einer Masse über:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{y_g}{g}}$$

Gl. (14) gilt aber auch angenähert für beliebige Massenverteilung zwischen den beiden Auflagerungen. Um das zu beweisen, wollen wir die Biegungsschwingung eines Balkens unter dem Eigengewicht oder unter einer gleichmäßig verteilten Belastung q kg/cm betrachten. In diesem Fall lautet die Gleichung der statischen elastischen Linie:

$$y_g = \frac{q\,l^4}{24\,E\,J}\left(\frac{x}{l} - 2\,\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Das in Gl. (14) einzusetzende Differential der Masse ist $\frac{q}{g}\,dx$ und die Verbindung der Gleichungen (14) und (15) liefert:

$$T_I = 2\pi \sqrt{\frac{q\,l^4}{24\,E\,J\,g}} \sqrt{\frac{\int_0^l \left(\frac{x}{l} - 2\,\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)^2 dx}{\int_0^l \left(\frac{x}{l} - 2\,\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right) dx}} = \frac{2}{\pi}\,l^2 \sqrt{\frac{q}{E\,J\,g}} \cdot 0{,}998 \quad . \quad . \quad (16).$$

Nach der genauen Formel hätte man die Schwingungsdauer erhalten zu:

$$T_I = \frac{2}{\pi}\,l^2 \sqrt{\frac{q}{E \cdot J \cdot g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a).$$

Die Abweichung zwischen Annäherung und genauer Berechnung ist nur etwa $^1/_5$ vH.

Für den beiderseits eingespannten Balken mit gleichmäßig verteilter Masse liefert die Annäherungsrechnung innerhalb der Rechenschiebergenauigkeit das gleiche Ergebnis wie die genaue Rechnung:

$$T_I = 0{,}280\,l^2 \sqrt{\frac{q}{E \cdot J \cdot g}}.$$

Selbst beim einseitig eingespannten vorragenden Balken, bei dem man besonders große Abweichungen zwischen der statischen und der schwingungselastischen Linie erwarten sollte, ist der mit der Annäherungsrechnung verbundene Fehler geringer als $^1/_2$ vH.

Der Balken mit Massen, die in entgegengesetzter Richtung schwingen. Wir betrachten einen beiderseits gelagerten Balken, der mit einer zwischen den Lagern sitzenden Masse m_1 und einer am freitragenden Ende sitzenden Masse m_2 behaftet ist (Abb. 2). Die Bewegungsgröße beim Durchgang durch die Mittellage a ist gleich der Differenz der Bewegungsgrößen beider Massen, also gleich $m_1 \left(\frac{dy_1}{dt}\right)_a - m_2 \left(\frac{dy_2}{dt}\right)_a$. Das gleiche gilt von den Auflagekräften: Auch hier ist der während einer Viertelschwingung von den äußeren Kräften ausgeübte Impuls gleich dem Zeitintegral der Differenz der Auflagekräfte. Bei entsprechender Massenverteilung kann es vorkommen, daß die Differenz der Auflagekräfte und infolgedessen auch die resultierende Bewegungsgröße Null oder sehr klein wird. In diesem Fall versagt Gl. (14), da unter dem Wurzelzeichen $\frac{0}{0}$ oder der Quotient aus 2 kleinen Größen steht Die kleinen Abweichungen zwischen der statischen und der dynamischen elastischen Linie sind nicht mehr vernachlässigbar klein bei der Aufstellung der Differenzwerte.

Der Grenzfall liegt in dem durch Abb. 2 veranschaulichten Schwingungsgebilde mit 2 Massen z. B. dann vor, wenn sowohl die Massen m_1 und m_2, als auch die von ihnen zurückgelegten Wege y_1 und y_2 einander gleich sind. Die letztere Bedingung ist erfüllt, wenn c in Abb. 2 gleich $0{,}226\,l$ gemacht wird.

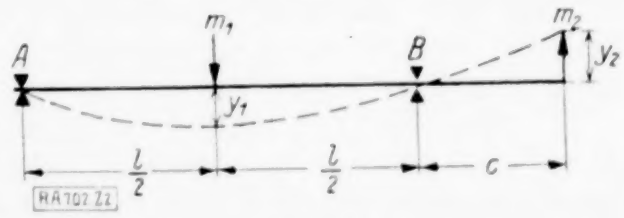


Abb. 2.

Man übersieht auf Grund der vorausgehenden Ueberlegung sofort, wie man auch in diesem Falle mit Hilfe des Impulssatzes zu einem befriedigenden Ergebnisse kommen kann. Bei der Schwingung der Anordnung Abb. 2 findet keine Verschiebung des

Massenschwerpunktes, wohl aber eine Drehung der Gesamtmasse statt, indem die zu m_1 und m_2 gehörigen Teilchen nach verschiedener Richtung verlagert werden. Wir haben infolgedessen den Impulssatz für Drehbewegungen

$$\int_0^{T_I/4} M\,dt = \Sigma m \cdot x \cdot v_a = \Sigma m \cdot x \left(\frac{dy}{dt}\right)_a$$

anzuschreiben. Da wir den Fall, daß außer dem Moment noch eine Kraft auftritt, nicht ausschließen wollen, müssen wir einen bestimmten Momentenpunkt wählen, der mit der einen Auflagekraft etwa mit A zusammenfallen soll. Mit x ist der Abstand der Masse vom Momentenpunkt bezeichnet. Der Impulssatz liefert dann:

$$T_I = 2\,\pi \sqrt{\frac{\Sigma (m \cdot y^2 \cdot x)}{g\,\Sigma (m \cdot y \cdot x)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

(zweifach gelagerte Welle mit teils innerhalb, teils außerhalb der Lagerverbindungslinie sitzenden Massen).

Die Massen, die in der äußersten Nullage unterhalb der Mittellinie liegen, sind mit positivem, die oberhalb liegenden mit negativem Vorzeichen einzusetzen, während y und y^2 bei dieser Regelung stets positives Vorzeichen haben. Wendet man die Gl. (17) auf die Anordnung nach Abb. 2 an, so erhält man die Schwingungsdauer $T_I = 0{,}374\,\pi \cdot \sqrt{\frac{G \cdot l^3}{g \cdot E \cdot J}}$ mit einer Genauigkeit von mindestens $^1/_2$ vH, während Gl. (14) versagt hätte. Man übersieht leicht, daß Gl. (17) die allgemeinere Form ist, und daß Gl. (14) aus (17) daraus hervorgeht, daß man den Momentenpunkt ins Unendliche gelegt hat. Die Unterschiede in den x-Werten sind in diesem Falle beliebig klein und x kann deshalb vor die Summenzeichen gesetzt und herausgehoben werden.

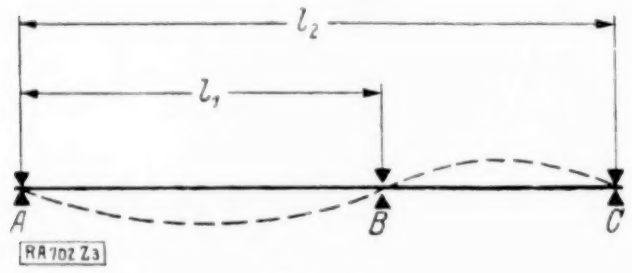


Abb. 3.

Mit Hilfe der Gl. (17) ist es auch möglich, die Biegungsschwingungszahl der dreifach gelagerten Welle (Abb. 3) zu bestimmen. Wir haben die statische elastische Linie unter der Voraussetzung zu zeichnen, daß die Massen m zwischen A und B, jede mit der Kraft $m \cdot g$ nach unten und die Massen m zwischen B und C nach oben gezogen werden. Daraus bestimmen wir die Durchbiegung y als Funktion von x und die Größe der statischen Auflagekräfte A, B und C, die den Massen m entsprechen. Wir brauchen aber die Auflagekräfte, die den fingierten Massen my entsprechen, und die erhalten wir durch Multiplikation von A, B und C mit $\frac{\Sigma (m \cdot x \cdot y)}{\Sigma (m \cdot x)}$. Den Momentenpunkt legen wir nach A und schreiben:

$$T_I = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{\Sigma (m \cdot y^2 \cdot x)\ \Sigma (m \cdot x)}{(B l_1 + C \cdot l_2)\ \Sigma (m \cdot x \cdot y)}} \quad \text{(Welle in 3 Lagern)} \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Die Gl. (18) kann auch zur Bestimmung der Eigenschwingungszahl II. Ordnung der zweifach gelagerten Welle benutzt werden. Man muß in diesem Falle nur abschätzen, zwischen welchen beiden Massen der Schwingungsknoten liegt, und die statische elastische Linie für den Fall aufzeichnen, daß die links vom Knoten liegenden Massen durch mg nach unten und die rechts liegenden Massen nach oben angezogen werden. Das mittlere Lager fällt hier weg und B ist Null zu setzen. Die statische Auflagekraft C mal Hebelarm l_2 ist gleich $g \Sigma m \cdot x$ und Gl. (18) geht deshalb über in:

$$T_{II} = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{\Sigma (m \cdot y^2 \cdot x)}{g \cdot \Sigma (m \cdot y \cdot x)}} \quad \text{(Welle in 2 Lagern)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Die Gleichungen (17) und (19) liefern gleiche Ausdrücke für T_I und T_{II}. Bei der Aufstellung der statischen elastischen Linie für T_{II} [Gl. (19)] ist nur zu beachten, daß ein Teil der Massen nach unten und der andere Teil nach oben angezogen wird, und daß die Lage des Knotenpunktes geschätzt werden muß.

Die Gl. (19) haben wir zur Bestimmung der Eigenschwingungszahl II. Ordnung einer gleichförmig mit Masse belegten Welle benutzt. Die Bestimmung der Lage des Knotenpunktes ist hier aus Symmetriegründen besonders einfach: Der Knotenpunkt liegt in der Mitte. Die Genauigkeit, mit der T_{II} bestimmt wird, ist in diesem Fall 0,2 vH.

Die Gl. (14) ist auf anderem Wege schon früher von Kull[1]) mit Hilfe einer »repräsentierenden« Durchbiegung f^* gefunden worden. Kull zeigt an einer Reihe von Beispielen, mit welcher großen Genauigkeit die Gleichung zur Berechnung von T_1 verwendet werden kann, solange die Massen zwischen den Lagern liegen, und er weist auf die erheblichen Fehler hin, sobald die Massenverteilung unserer Abb. 2 entspricht. Die vorausgehenden Ueberlegungen zeigen, woher diese größeren Abweichungen kommen, und wie man mit Hilfe der Gl. (17) auch in diesem Fall befriedigende Ergebnisse erhalten kann.

Eine ähnliche Ueberlegung kann auf eine mit Schwungmassen behaftete Welle, die Verdrehungsschwingungen ausführt, angewendet werden. Auch in diesem Falle kann die Eigenschwingungszahl angenähert mit Hilfe des Impulssatzes bestimmt werden, wie an anderer Stelle[2]) gezeigt werden wird. 702

Schraubflächen und Nullsystem in kotierten Rissen.

Von **EMIL WAELSCH** in Brünn.

Mit Hilfe der Methode der kotierten Risse ergeben sich in einfachster Weise die Schraublinien einer Schraubung, die bekannten Konstruktionen zur Parallelbeleuchtung der Schraubflächen (vergl. die Lehrbücher über darstellende Geometrie) und die wichtigsten Eigenschaften des Nullsystems auch auf Grund einer sehr einfachen, der Methode entsprechenden Definition des linearen Komplexes.

1. Die Rißebene Π sei horizontal und Zeichenebene. Kote und Riß X' des Punktes X werden mit x bezeichnet, der Riß einer Geraden g mit g'. Der kotierte Kreis $\mathfrak{S}'$ (Abb. 1) ist Riß einer Rechtsschraublinie $\mathfrak{S}$ mit vertikaler Achse durch O.

Für die Kote x eines Punktes X von $\mathfrak{S}$ gilt: $x = c\,t$, wo c Parameter (reduzierte Ganghöhe) von $\mathfrak{S}$ ist. Für den Punkt mit der Kote 1 ist daher: $1 = c\,\tau$, $\tau = \widehat{01}/r$ mit $\widehat{01}$ als Bogenintervall von $\mathfrak{S}$. Die Tangenten t_X von $\mathfrak{S}$ haben dasselbe Intervall $J_t = \overline{01} = \widehat{01}$.

Im folgenden wird $c = 1$ gesetzt, so daß: $\tau = 1$, $\widehat{01} = r$, $x = t$. Daher: »Die Kreise mit dem Zentrum O und gleich gerichteten Bogenintervallen, die gleich sind deren Radien, sind die kotierten Risse von Schraublinien derselben Schraubung. Die Bahntangente t_X eines Punktes X hat ein Intervall $J_t = \overline{01} = \widehat{01}$«.

Der Riß $x_1 = x + 1$ (d. h. des Punktes von t_X, welcher die Kote $x + 1$ hat) entsteht daher (Abb. 2a) aus O, indem O um den Riß x »rechtsum« (nach dem militärischen Kommando) gedreht wird, d. h. durch 90^0 im negativen Sinn.

2. Es sei C der Punkt auf der Achse mit der Kote $c = 1$ und F_g der Fluchtpunkt aus C einer Geraden g und ihrer Parallelen. Diesen wird (Abb. 2b), ihr »Pol« (»Drehflucht« bei Th. Schmid) G zugewiesen, der aus F_g durch Linksumdrehung entsteht. Ist g horizontal, so liegt G senkrecht zu g im Unendlichen von Π.

Die Pole zu einer Ebene E paralleler Geraden (Abb. 2c) liegen dann auf der »Polgeraden« e von E, die durch Linksumdrehung der Fluchtspur f_E von E erhalten wird. e ist der Riß f' einer Fallinie f von E.

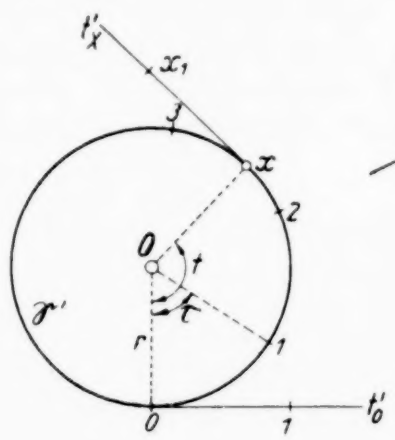


Abb. 1.

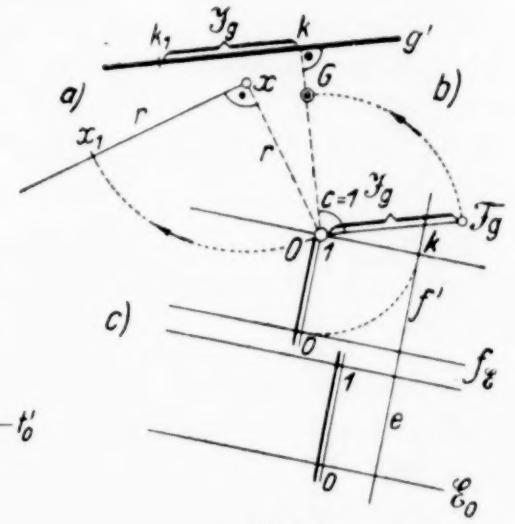
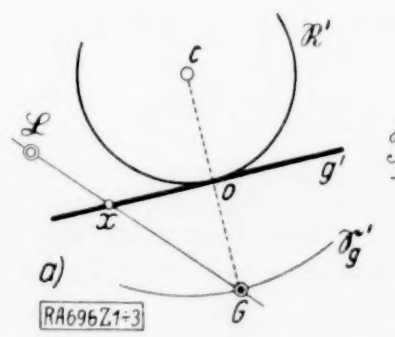


Abb. 2.



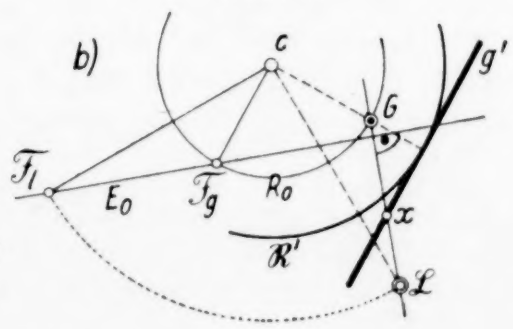


Abb. 3.

[1]) Z. d. V. D. I. 1918, Heft 18 und 19.
[2]) Erscheint demnächst in der Schweiz. Bauzeitung.

Die Bahntangente t_X des Punktes X hat den Pol x. Alle Punkte, deren Bahntangenten parallel E sind, haben daher ihre Risse auf e. Die Fallinie f von E ist Bahntangente für ihren Kreuzungspunkt K mit der Achse. Satz: »Ist l parallel E, und t_X in E, so ist wenn L der Pol von l ist, Lx senkrecht E_0''.

3. Parallelbeleuchtung der Schraubflächen. a) Es sei l der Lichtstrahl, L dessen Pol, der »Beleuchtungspol«. Die allgemeine Schraubfläche $\mathfrak{F}$ sei gegeben durch ihre Spur $\mathfrak{F}_0$ auf H. Ist X_0 ein Punkt der Trennungslinie T von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}_0$, so ist die Tangentialebene E von $\mathfrak{F}$ in X_0 parallel l, enthält t_{X0} und die Tangente t_0 von K_0 in X_0. Nach dem Satz in 2. ist $L X_0$ senkrecht t_0, d. i. die Tangente von $\mathfrak{F}_0$ in X_0 als Spur von E; daher ist X_0 Fußpunkt einer Normalen n_{X0} von $\mathfrak{F}_0$ aus L. Analog für andere horizontale Rißebenen, deren Beleuchtungspole auf derselben Vertikalen liegen, so daß folgt: »Der Riß T' ist die Fußpunktskurve aus L der Kurvenschar, die aus $\mathfrak{F}_0$ durch Drehung um c entsteht«.

Insbesondere folgt hieraus für die Torse $\mathfrak{T}$ der Schraublinie $\mathfrak{S}$, da deren Spur $\mathfrak{T}_0$ Evolvente von $\mathfrak{S}'$ ist, daß die Tangenten aus L an $\mathfrak{S}'$ Teile von T' sind. Ferner ist die Spitze von $\mathfrak{T}_0$ auf $\mathfrak{S}'$ Punkt von T' also $\mathfrak{S}$ Teil von $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{S}$ ist ja Rückkehrkante von $\mathfrak{T}$).

Für eine Regelschraubfläche $\mathfrak{R}$ geht n_{X0}, da die Erzeugende g in E liegt, durch den Pol G auf dem Kreis $\mathfrak{S}_g'$, so daß sich die Konstruktion von Abb. 3a für x auf g' ergibt. Für einen horizontalen Lichtstrahl l (zur Bestimmung des Umrisses $\mathfrak{R}''$) fällt L senkrecht zu l ins Unendliche von H.

b) Daß L, G in einer zur Fluchtspur f_E senkrechten Geraden liegen, folgt direkt aus dem Satze in 2., wobei f_E den Fluchtpunkt F_l verbindet mit dem Fluchtpunkt F_g auf dem Fluchtkreis R_0 von $\mathfrak{R}$; dies dient auch (Abb. 3b) zur Konstruktion des Risses x auf g'.

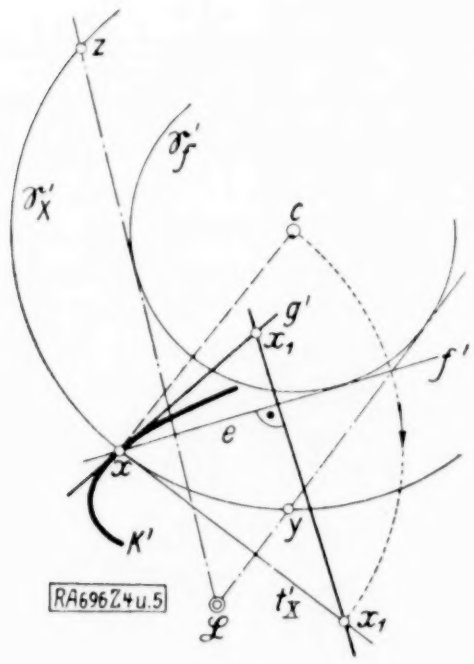


Abb. 4.

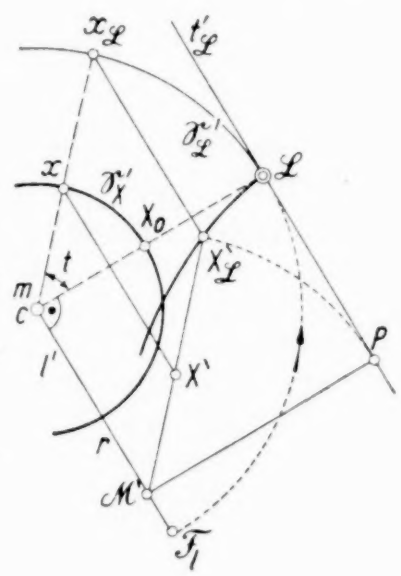


Abb. 5.

c) Allgemeine Schraubfläche $\mathfrak{F}$, erzeugt durch Schraubung einer Kurve K (Abb. 4): die Risse x auf T' zu finden, die auf dem Kreise $\mathfrak{S}_X'$ liegen. Dieser ist Riß einer Schraublinie $\mathfrak{S}_X$ auf $\mathfrak{F}$, für deren Punkt X auf T die $\mathfrak{F}$ eine Tangentialebene E besitzt, in die t_X und die Tangente t in X an K fallen. Nach dem Satz in 2. muß $Lx\,(=e)$ senkrecht zur Schichtenlinie x_1 von E sein. Die Polgerade e von E hüllt aber, wenn X auf $\mathfrak{S}_X$ läuft, den Kreis $\mathfrak{S}_f'$, so daß die Konstruktion der fraglichen Risse y, z folgt. Die Risse der Erzeugenden der Trennungslinie der Torse, die $\mathfrak{F}$ längs $\mathfrak{S}_X$ umschrieben wird (Methode von Rohn und Papperitz), sind die Geraden Ly, Lz (siehe a). Der Kreis $\mathfrak{S}_f'$ ist auch tangential an die Fluchtlinie F_t F_g der Ebene E.

d) Schlagschatten der Schraublinie $\mathfrak{S}$ auf H. H werde durch den Punkt X_0 von $\mathfrak{S}$ gelegt, so zwar, daß die Richtungen von c nach X_0 und L übereinstimmen (Abb. 5). Sind X, X_L auf derselben Horizontalen gelegene Punkte der Schraublinien $\mathfrak{S}_X$, $\mathfrak{S}_L$, so liegen die Schlagschatten $X^\backslash$, $X_L^\backslash$ auf einer zu dieser parallelen. Aus $X^\backslash x X \sim F_l c C$ folgt $\overline{X^\backslash x} : x = r : 1$ also $\overline{X^\backslash x} = r x$, daher:

$$P L = \overline{X^\backslash x} = r x = [\text{s. 1.}] = r t = \widehat{L x}_L = \widehat{P X}_L^\backslash.$$

Folglich ist $\mathfrak{S}_L^\backslash$ eine gespitzte Zykloide mit dem auf t_L' rollenden Kreis $\mathfrak{S}_L^\backslash$, wobei l parallel t_L ist; $X^\backslash$ aber beschreibt eine verkürzte Zykloide, da $X^\backslash$ auf $M^\backslash X_L^\backslash$ den Abstand $\overline{M^\backslash X^\backslash} = m x$ behält.

4. Die zu t_X in X senkrechte Ebene N_X ist die Nullebene von X für das Nullsystem der Schraubung. Ihre Schichtenlinie von der Kote x schneidet die Achse, und jene von der Kote x_1 kann durch die in Abb. 6 punktierte Konstruktion gefunden werden,

und durch Umkehrung auch der Nullpunkt X der Ebene $E \equiv N_X$. Der Riß der Schichtenlinie der Kote x_1 ist auch die Polgerade der zur Geraden $C\,x$ senkrechten Ebene.

Eine durch X gehende Gerade n von N_X ist Nullstrahl des Nullsystems oder Strahl des mit dem Nullsystem verbundenen linearen Komplexes. Ihr Intervall (vektor) auf n' zwischen den Rissen x und $x_1 = x + 1$ hat in bezug auf c ein Drehmoment, das gegeben ist durch den bezeichneten Flächeninhalt des schraffierten Parallelogramms[1]), dessen Betrag gleich ist $\overline{x\,c} \cdot p$, d. i. das Intervall von t_X mal dem Intervall der zu t_X senkrechten Ebene N_X, daher gleich ist $1 = c$. Das Moment des Intervalls von n bezüglich c ist folglich $= -1$. Daher: »Der Ort der Geraden n, deren Intervall ein gegebenes Moment m in bezug auf c hat, ist ein linearer Komplex, dessen Parameter $= -m$ ist[2])«.

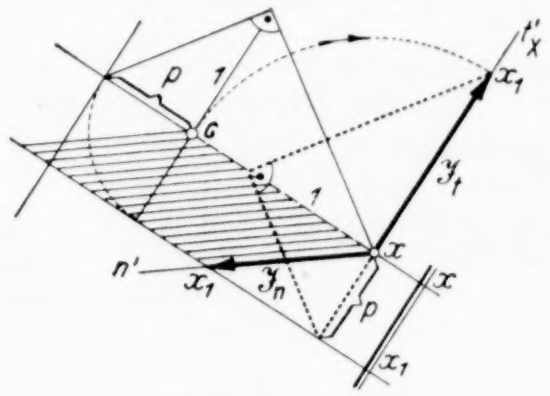


Abb. 6.

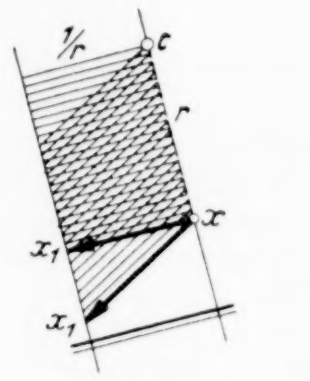


Abb. 7.

4a. Wird dies als Definition des linearen Komplexes zugrunde gelegt, so ergibt sich sofort (Abb. 7), daß die Komplexstrahlen, die durch X gehen, in einer Ebene liegen, da die Risse x_1 für diese Strahlen, wegen des konstanten Moments der Intervalle $x\,x_1$ auf einer Geraden liegen müssen.

Dieselbe Abbildung ergibt, daß die Komplexstrahlen einer Ebene durch denselben Punkt gehen, den Nullpunkt dieser Ebene[3]).

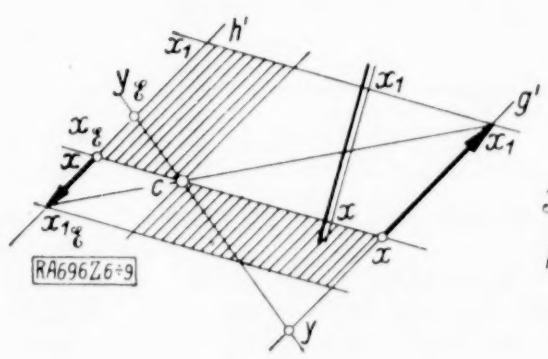


Abb. 8.

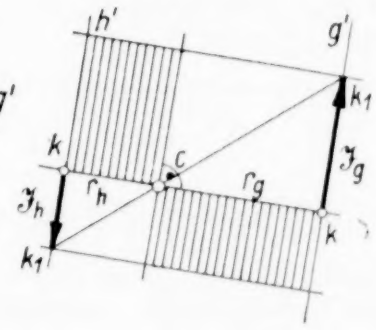


Abb. 9.

Der Nullpunkt X_E der Ebene E durch die Gerade g hat den Riß x_E (Abb. 8); dieser durchläuft, wenn E sich um g dreht, eine Gerade h' parallel g' (da $x\,x_1$ auf g' das Intervall eines Nullstrahls ist), h' ist der Riß einer Geraden h mit dem Intervall $x_E\,x_{1E}$, die X_E enthalten möge; wegen der ähnlichen Tripel $x_1\,x\,y$ und $x_{1E}\,x_E\,y_E$ liegt auch der Nullpunkt Y_E auf h.

Vermöge des 2. Parallelogramms der Abb. 2 folgt auch, daß g und h vertauschbar sind.

Ist (Abb. 9) K der Kreuzungspunkt, r_g der kürzeste Abstand von g und der Achse, $\operatorname{tg} \alpha_g = 1/J_g$ die Steigung von g, so geben die flächengleichen Rechtecke: $J_g\,r_h = J_h\,r_h$, also die Relation: $r_h \operatorname{tg} \alpha_h = r_g \operatorname{tg} \alpha_g$. 696

[1]) Die in den Abb. schraffierten Parallelogramme sollen gleiche Fläche haben.

[2]) Dies folgt selbstverständlich auch sofort aus anderen Definitionen, etwa aus der Gleichung $a\,(z - z') + b\,(x\,y' - x'\,y) = 0$ des linearen Komplexes oder aus der ursprünglichen Definition des Komplexstrahles, als in bezug auf welchen eine Dyname das Moment 0 hat.

[3]) Mit Hilfe eines jeden dieser Sätze kann bekanntlich sehr einfach bewiesen werden, daß die Nullebenen der Punkte einer Geraden g durch eine, die »konjugierte«, Gerade h gehen, und daß die Nullpunkte der Ebenen durch g auf h liegen. Jedoch soll der letzte Satz, der hier verwendeten Methode entsprechend, noch wie oben folgt bewiesen werden.

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Geschwindigkeit zweier Kugeln, die unter Einwirkung der Schwere in einer zähen Flüssigkeit fallen. Vor anderthalb Jahr berechneten H. Dahl und ich die gegenseitige Einwirkung zweier Kugeln, die in einer zähen Flüssigkeit fallen[1]). Wir führten die Berechnungen nur für den Spezialfall vollständig durch, daß die Geschwindigkeiten der Kugeln die Richtung der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte haben. Unser Ergebnis faßten wir in Reihen zusammen, die gut konvergieren, wenn die Kugeln in einem nicht allzu geringen Abstand voneinander sich befinden. Die Reihen sind aber für den wichtigen Fall unbrauchbar, daß die Kugeln sich berühren.

Neuerdings ist dasselbe Problem von Margaret Stimson und G. B. Jeffery[2]) mittels Dipolarkoordinaten behandelt worden. Für

[1]) Arkiv f. mat., astr. o. fys. 19 A, Nr. 13 (1925).

[2]) Roy. Soc. Proc. (A) 111, S. 110 (1926).

den Fall, daß die Kugeln gleich groß sind und mit derselben Geschwindigkeit in derselben Richtung längs der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte sich bewegen, finden sie folgendes unerwartet einfache Ergebnis. Der Widerstand gegen die eine Kugel wird durch die Anwesenheit der anderen im Verhältnis $1 : \lambda$ verkleinert, wobei

$$\lambda = {}^2/_3 \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(n+1)}{(2n-1)\,(2n+3)} \left\{1 - \frac{4 \sinh^2 (n + {}^1/_2)\,\alpha - (2n+1)^2 \sinh^2 \alpha}{2 \sinh (2n+1)\,\alpha + (2n+1) \sinh 2\alpha}\right\}$$

ist. Nach meiner Meinung liegt hier ein Schreibfehler vor. Die rechte Seite dieser Gleichung soll genau doppelt so groß sein. Die unten abgedruckte Tabelle ist aber richtig. Der Parameter α ist dadurch bestimmt, daß wenn a den Halbmesser der Kugeln und $2l$ den Abstand ihrer Mittelpunkte bezeichnet, $\cosh \alpha = l/a$.

Stimson und Jeffery teilen folgende Tabelle mit, in der jedoch die erste Zeile jetzt zugefügt ist:

α	$\frac{l}{a}$	λ
0,0	1,000	0,645
0,5	1,128	0,663
1,0	1,543	0,702
1,5	2,352	0,768
2,0	3,762	0,836
2,5	6,132	0,892
3,0	10,068	0,931
∞	∞	1,000

Diese Tabelle läßt sich leicht mittels Dahls Reihenentwicklungen nachprüfen, außer den zwei ersten Zeilen, für welche diese Reihen nicht genügend konvergent sind.

Es soll noch darüber berichtet werden, wie der erste der obigen λ-Werte erhalten wurde. Dieser bezieht sich auf den Fall, daß die Kugeln sich berühren. Für diesen Fall sind Dipolarkoordinaten nicht anwendbar. Die obige Formel bleibt jedoch für jeden noch so kleinen Abstand zwischen den Kugeln gültig. Daher ist es naheliegend, λ für den Fall der Berührung ($\alpha = 0$) durch einen Uebergang zur Grenze zu berechnen. Aus physikalischen Gründen ist es klar, daß λ eine kontinuierliche Funktion von α ist. Dann ergibt der erwähnte Uebergang zur Grenze den richtigen Wert. Dabei geht die obenstehende Reihe in das folgende Integral über:

$$\lim_{\alpha \to 0} \lambda = 2 \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{4} \left\{1 - \frac{4 \sinh^2 x - 4x^2}{2 \sinh 2x + 4x}\right\} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{4x^2 + 4x + 2 - 2e^{-2x}}{e^{2x} + 4x - e^{-2x}}\, dx\,.$$

Durch ein numerisches Verfahren habe ich für dieses Integral den Wert 0,645 gefunden.

Wenn zwei gleich große Kugeln (Halbmesser $= a$, Dichte $= \rho_1$) in einer Flüssigkeit (Zähigkeit $= \mu$, Dichte $= \rho$) unter Einwirkung der Schwere (Beschleunigung $= g$) fallen, die eine senkrecht unterhalb der anderen, erreichen sie die Geschwindigkeit

$$u = \frac{2\,g\,a^2}{9\,\lambda\,\mu}\,(\rho_1 - \rho).$$

Für die Gültigkeit der Berechnung von λ ist u. a. erforderlich, daß $\rho\,a\,u/\mu$ und $(\rho\,l\,u/\mu)^2$ so klein sind, daß sie neben 1 vernachlässigt werden können.

Upsala, im Juni 1926. H. Faxén. 679

Eine wichtige Vereinfachung der Methode von Ritz zur angenäherten Behandlung von Variationsproblemen. Die bekannte Methode von Ritz, welche besonders in der Elastizitätstheorie große Verwendung gefunden hat, ist, wie Herr Galerkin[1]) aus Leningrad gezeigt hat, einer ebenso eleganten wie praktisch brauchbaren Vereinfachung fähig.

Um das Integral

$$U = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'' \ldots)\, dx \quad \ldots\ldots (1)$$

zu einem Extremum zu machen, muß die Variation

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \delta F\, dx$$

verschwinden. Mit

$$P_0 = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad P_n = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$$

erhält man durch fortgesetzte partielle Integration bekanntlich

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \left\{P_0 - \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - \ldots\right\} \delta y\, dx \ldots \quad (2),$$

welcher Ausdruck für willkürliche Variationen δy verschwinden muß. Setzt man nun in der Art der Ritzschen Methode an Stelle der unbekannten Funktion y

$$y = \sum_{m=1}^{m=n} c_m f_m(x) \ldots\ldots\ldots (3),$$

wobei jede der n-Funktionen $f_m(x)$ die Randbedingungen des Problems befriedigt, aber sonst willkürlich ist, so wird im allgemeinen das Integral (2) für eine willkürliche Wahl der δy nicht verschwinden können, denn diese letzte Forderung verlangt eben

$$P_0 - \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - \ldots = 0\,,$$

[1]) Eine Darstellung in holländischer Sprache findet sich in der Zeitschrift Christiaan Huygens, 3ter Jahrgang 1923 bis 1924. C. B. Biezeno, Over een Vereenvoudiging en over en uitbreiding van de Methode van Ritz, S. 69 bis 75. — Die Originalabhandlung von Galerkin ist 1915 in russischer Sprache in der Zeitschrift Wjestnik Inschenerow erschienen.

d. h. die strenge Befriedigung der Differentialgleichung des Problems.

Man kann nun aber n Typen von virtuellen Aenderungen wählen, nämlich gerade die n Typen $\delta y = \delta t \cdot f_m(x)$, wobei δt lediglich einen von x unabhängigen unendlich kleinen Parameter darstellt, und kann verlangen, daß das Integral (2) für jeden dieser n Typen verschwindet, wodurch man n Integrale von der Form erhält

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ P_0 - \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - \cdots \right\} f_m(x)\, dx = 0 \ldots \quad (4).$$

$m = 1$ bis $m = n$.

In die Werte P_n ist natürlich y aus Gl. (3) einzusetzen. Die Werte c_m, die man auf diese Weise gewinnt, sind offenbar die best möglichen für den gewählten Ansatz Gl. (3).

Aus den Gleichungen (4) lassen sich die Beiwerte c_m sehr übersichtlich berechnen. Bei einem Stabilitätsproblem hat man nur die Eliminationsdeterminate der c_m gleich Null zu setzen.

Man sieht hier sehr schön, wie das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Variationsrechnung wurzelt, und erkennt, daß man bei bekannter Differentialgleichung niemals nötig hat, zur Berechnung der Beiwerte c_m des angenommenen Näherungsansatzes, Gl. (3), den Wert U, Gl. (1), zu differenzieren und die c_m aus den n Gleichungen $\frac{\partial U}{\partial c_m} = 0$ zu berechnen [1]).

Man setzt vielmehr

$$\int_{x_0}^{x_1} \text{Differentialgleichung} \times \text{virtueller Aenderung der gesamten Funktion } dx = 0$$

und kann die n Gleichungen für die Beiwerte c_m in Form von n bestimmten Integralen unmittelbar anschreiben und zwar auch dann, wenn die Differentialgleichung gar nicht linear ist.

Es wird nämlich:

$$\int_{x_0}^{x_1} \text{Differentialgleichung [ausgedrückt durch Gl. (3)]} \times f_m(x)\, dx = 0,$$

für $m = 1$ bis $m = n$, wobei eventuell $n = \infty$.

Delft. H. Hencky. 667

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin SW 19, Beuthstr. 7, zu beziehen.)

Handbuch der Physik. Unter redaktioneller Mitwirkung von R. Grammel-Stuttgart, F. Henning-Berlin, H. Konen-Bonn, H. Thirring-Wien, F. Trendelenburg-Berlin, W. Westphal-Berlin. Herausgegeben von H. Geiger und Karl Scheel. Verlag von Julius Springer, Berlin.

Bisher erschienene Bände:

Band I: Geschichte der Physik. Vorlesungstechnik. Redigiert von Karl Scheel. Mit 162 Abbildungen. 404 S. Preis 31,50 M, geb. 33,60 M.

Band II: Elementare Einheiten und ihre Messung. Redigiert von Karl Scheel. Mit 297 Abbildungen. II + 350 S. Preis 39,60 M, geb. 42 M.

Band IX: Theorien der Wärme. Redigiert von F. Henning. Mit 61 Abbildungen. VIII + 616 S. Preis 46,50 M, geb. 49,20 M.

Band X: Thermische Eigenschaften der Stoffe. Redigiert von F. Henning. Mit 207 Abbildungen. VI + 486 S. Preis 35,40 M, geb. 37,50 M.

Band XI: Anwendung der Thermodynamik. Redigiert von F. Henning. Mit 198 Abbildungen. VI + 454 S. Preis 34,50 M, geb. 37,20 M.

Band XIV: Elektrizitätsbewegung in Gasen. Redigiert von W. Westphal. Mit 189 Abbildungen. VI + 444 S. Preis 36 M, geb. 38,10 M.

Band XVII: Elektrotechnik. Redigiert von W. Westphal. Mit 360 Abbildungen. VII + 392 S. Preis 31,50 M, geb. 33,60 M.

Band XXII: Elektronen, Atome, Moleküle. Redigiert von H. Geiger. Mit 148 Abbildungen. 568 S. Preis 42 M, geb. 44,70 M.

Band XXIII: Quanten. Redigiert von H. Geiger. Mit 225 Abbildungen. X + 782 S. Preis 57 M, geb. 59,70 M.

Unter den zahlreichen größeren Erscheinungen auf dem Gebiete der Physik, die zurzeit verbreitet werden, gehört das Springersche Handbuch zweifellos zu den bedeutendsten. Stellt es doch überhaupt eines der umfassendsten literarischen Unternehmungen dar, die jemals auf diesem Gebiete eingeleitet wurden. Gegenüber der älteren Form physikalischer Handbücher wie des Winkelmannschen oder des von Müller-Pouillet, wie auch gegenüber den Physikbänden der »Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften« ist hier ein ganz neuartiger Plan mit großer Umsicht entworfen worden. In 24 Bänden, von denen jeder ein abgeschlossenes Ganze für sich bildet, wird der Gesamtbereich der heutigen Physik von etwa zweihundert Verfassern dargestellt, die, wenn auch die Spitzen der älteren Generationen fehlen, ausnahmslos zu den bedeutendsten heutigen Forschern zählen. Die einzelnen Aufsätze halten die Mitte zwischen einer breiten lehrbuchmäßigen Darstellung und der Form, wie sie etwa größere zusammenfassende Berichte in Zeitschriften aufweisen. Bewundernswert ist die relativ hohe Gleichmäßigkeit, die sich in den Beiträgen zeigt und die einerseits von der guten und gründlichen Schulung der heutigen deutschen Physiker, andererseits aber auch von dem seltenen Geschick und der aufopferungsvollen Herausgeberarbeit der Hauptredakteure Geiger und Scheel Zeug-

[1]) Wie dies die Methode von Ritz in ihrer ursprünglichen Form tut.

nis ablegt. Daß die buchtechnische Ausstattung der Bände allen billigen Anforderungen genügt, ist bei einem Verlag wie dem Springer'schen selbstverständlich. Als seine größte Leistung muß es aber angesehen werden, mit welcher Pünktlichkeit und Regelmäßigkeit die Bände erscheinen, so daß aller Voraussicht nach dieses Handbuch von dem Schicksal so vieler ähnlicher Sammelwerke, bei seiner Beendigung schon veraltet zu sein, bewahrt bleiben wird. Und das will bei den Riesenschritten, mit denen die heutige Physik fortschreitet, viel heißen.

Zu dem Inhalt der einzelnen Bände, soweit sie bisher herausgekommen sind, können hier natürlich nur wenige Bemerkungen gemacht werden, die fast zufallsartig herausgegriffen erscheinen mögen. Eine eingehendere Besprechung müssen wir uns für die Mechanikbände vorbehalten, die für die nächste Zeit angekündigt sind.

Der erste Band wird, wie billig, durch eine kurz gefaßte Geschichte der Physik eröffnet, die von der Hand E. Hoppes, in bekannt vortrefflicher Darstellung, von den ersten Anfängen im Altertum bis über die Entdeckung der Quantentheorie hinaus reicht. Nach einem kurzen Ueberblick über die Gliederung der physikalischen Literatur von Scheel findet sich ein Aufsatz von Timerding, den man hier wohl kaum vermuten würde, über die Fragen des physikalischen Unterrichts. Man wird dem Verfasser durchaus darin zustimmen müssen, daß an unseren höheren Schulen die Physik immer noch zu wenig intensive Pflege findet. Der umfassendste Abschnitt des ersten Bandes unter der Ueberschrift »Vorlesungstechnik« von R. Mecke und A. Lambertz ist einem Ueberblick über den Inhalt einer normalen Universitätsvorlesung über Experimentalphysik gewidmet. Soweit hier die Mechanik behandelt wird, ist der Versuch gemacht, über den etwas erstarrten traditionellen Stoff hinaus einiges Neue aufzunehmen.

Der zweite Band über elementare Einheiten und ihre Messung wird auch dem Ingenieur und dem Vertreter der technischen Mechanik viel Interessantes bieten. Der Bemerkung von J. Wallot am Schlusse seines einleitenden Kapitels, daß Maßsysteme als solche eigentlich entbehrlich seien, da man beim theoretischen Arbeiten davon unabhängig ist und beim praktischen viel besser mit den jeweils geeignetsten Maßeinheiten verschiedener Systeme operiert, wird man wohl zustimmen können. Die weiteren Kapitel behandeln die Längen- und Winkelmessung (F. Göpel), Gewichtsmessung (Felgentraeger), Raum- und Zeitmessung (Scheel), Geschwindigkeitsmessung einschließlich der Hydrometrie (v. Niesiolowski-Gawin), Druckmessung (Ebert) und eine besonders ausführliche Darstellung der Schweremessung (Berroth) mit Einschluß der experimentellen Gravitations-Forschung, die heute auch für die Technik schon große Bedeutung erlangt hat. Der Band wird abgeschlossen durch eine Erklärung und Zusammenstellung der allgemeinen physikalischen Konstanten (F. Henning). Uebrigens ist ein Auszug aus der Konstantentabelle in sehr zweckmäßiger Weise jedem einzelnen Band vorangestellt.

Etwas umfangreicher als die vorangehenden ist Band IX, Theorien der Wärme, geraten. Die klassische Thermodynamik wird von K. F. Herzfeld in München in sehr moderner Form behandelt. Ein besonderes Kapitel von Bennewitz ist dann noch den Folgerungen aus dem Nernstschen Wärmesatz gewidmet. A. Smekal gibt wieder eine Darstellung der statistischen und molekularen Theorie der Wärme. Sehr begrüßenswert ist, daß auch die bei den Physikern noch sehr wenig bekannte geistvoll durchdachte Axiomatik der klassischen Thermodynamik von Carathéodory in einem besonderen Kapitel von A. Landé referiert wird. Freilich müßte es das erstrebenswerte Ziel sein, diese Axiomatik mit der eigentlichen Darstellung, die das erste Kapitel bietet, innerlich zu verschmelzen. Aehnliches gilt auch über das Verhältnis des früher genannten Smekalschen Aufsatzes zu den beiden Kapiteln V und VI über Quantentheorie (A. Byk) und kinetische Theorie der Gase und Flüssigkeiten (G. Jäger).

Der zehnte Band ist den Forschungen über die thermischen Eigenschaften der Stoffe gewidmet. Von größerem Interesse für den Techniker ist dann wieder der Band XI, über Anwendung der Thermodynamik. Hier wird namentlich der umfangreiche Bericht von M. Jakob über Wärmeleitung mit Dank begrüßt werden. Mit Recht beklagt es der Verfasser, daß heute nur wenige Physiker auf diesem klassischen und für die Praxis so wichtigen Gebiete arbeiten, auf dem theoretische und experimentelle Untersuchung noch mancher Frage wünschenswert wäre. Die Jakobschen Ausführungen, die den beiden Seiten gleichmäßig Rechnung tragen, füllen eine Lücke aus, die in der bisherigen deutschen Literatur fühlbar gewesen ist. Der Aufsatz von Wegener über Thermodynamik der Atmosphäre ist ein sehr übersichtlicher Abriß der meteorologisch wichtigsten Fragen der Physik. Am unmittelbarsten berührt das Arbeitsgebiet des Ingenieurs das Schlußkapitel von K. Neumann über Wärmeumsatz bei Maschinen. Hier werden mit den in der Technik gebräuchlichen Hilfsmitteln der Wärmediagramme die Vorgänge an Dampfturbinen sowie an Verbrennungs-Motoren sachgemäß erläutert.

Der XVII. Band des Handbuches ist einer knappen zusammenfassenden Darstellung der Elektrotechnik gewidmet. F. Breisig behandelt die Telegraphie und Telephonie auf Leitungen, F. Kiebitz die drahtlose Uebertragung. Beiden Verfassern stehen umfangreiche Erfahrungen der Praxis zur Verfügung, die der gesamten Darstellung zugute gekommen sind. Ueber die Aufgaben der Röntgentechnik und sonstigen Anwendungen der Elektrizität in der Medizin berichtet H. Behnken. Die Theorie der Transformatoren und der elektrischen Ma-

schinen wird in Uebereinstimmung mit der in technischen Lehbüchern gepflogenen Darstellungsweise von R. und V. Vieweg wiedergegeben. Der Band wird abgeschlossen durch Bemerkungen zur neueren Hochspannungstechnik von Schumann und durch eine Untersuchung der nicht stationären Ausgleichsvorgänge und Ueberströme in Leitungen und Maschinen von Fraenckel. Wer über einige Kenntnisse der theoretischen Physik und ihrer mathematischen Hilfsmittel verfügt, wird aus diesem Bande von nicht ganz 400 Seiten alles für die heutige Elektrotechnik Wesentliche lernen können.

Von weitestem theoretischen Interesse ist naturgemäß der der Quantentheorie gewidmete Band XXIII. Eine umfassende Einführung in das Gesamtgebiet gibt zunächst W. Pauli. Daran schließen sich einzelne Berichte über die Methoden der Bestimmung des Wirkungsquantums von Ladenburg, über Absorption und Zerstreuung der Röntgenstrahlen von Bothe, über das Röntgenspektrum von Kulenkampff. P. Pringsheim berichtet über Phosphoreszenz und verwandte Fragen, J. Franck und P. Jordan über die Anregung von Quantensprüngen durch Stöße, W. Noddack über Photochemie. Es ist klar, daß auf diesem Hauptgebiet der heutigen deutschen physikalischen Forschung die Herausgeber es leicht hatten, durch Heranziehung der zuständigsten Mitarbeiter ein fast unübertreffliches Bild des Forschungszustandes von 1925 zu schaffen. Man wird es ihnen nicht zur Last legen dürfen und es wird keine Beeinträchtigung des Gesamtwerkes bilden, wenn man feststellt, daß in dem seither vergangenen Jahr sich das Bild wiederum nicht unwesentlich verändert hat. Mises. 757

Dr. C. **CRANZ,** Geh. Reg.-Rat und o. Prof. an der Technischen Hochschule Berlin, unter Mitwirkung von Prof O. v. **EBERHARD** und Major Dr. K. **BECKER,** Referent bei der Inspektion für Waffen und Gerät in Berlin. Aeußere Ballistik oder Theorie der Bewegung des Geschosses von der Mündung der Waffe ab bis zum Eindringen in das Ziel. Fünfte Auflage mit 132 Textabbildungen und einem Anhang Tabellen und Diagramme. Lehrbuch der Ballistik. Bd. I. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. XX + 711 S. Preis geb. 57 M.

Von dem bestens bekannten Standard-Werk ist kürzlich der erste Band (vereinigt mit dem früheren vierten) in fünfter Auflage in neuem Verlag erschienen. Das Buch ist vom Verfasser unter Mitwirkung von O. v. Eberhard und K. Becker gänzlich neu durchgearbeitet worden. Dabei ist nicht nur vieles Wertvolle neu hinzugekommen, sondern, was als besonders seltene Leistung angemerkt zu werden verdient, auch manches Veraltete ausgeschieden worden. Die Stellung der Ballistik als einer schwierigen mathematisch-physikalischen Disziplin, deren Anwendung großenteils in Händen liegt, die den Schwierigkeiten nicht gewachsen sind, bringt es mit sich, daß in der historischen Entwicklung immer wieder Veraltetes und Unzeitgemäßes auftritt, das der über der Sache Stehende bald als solches erkennt. Nach dem Gefühl des Referenten hätten noch zahlreiche sogenannte Lösungs»methoden« aus dem Lehrbuch fortbleiben können, die die Verfasser wohl nur deshalb aufgenommen haben, weil derartige Methoden eben in den Kreisen der Praktiker einen allzu beherrschenden Raum einnehmen. Hoffentlich wird die weitere Entwicklung auch zu einer weiteren Reinigung Anlaß geben und damit den Platz schaffen für eine ausführlichere Darstellung der wirklich sach- und zeitgemäßen Ergebnisse.

Im einzelnen mag bemerkt werden, daß in der Behandlung des sogenannten Hauptproblems der äußeren Ballistik, also der Integrationsaufgabe der Differentialgleichung eines punktförmigen Geschosses, die zeichnerischen Methoden und stückweise numerischen Berechnungen jetzt stärker hervortreten als in den früheren Auflagen. Diese Verfahren bewähren sich ganz besonders bei der Ermittlung der Verhältnisse, die beim Fernschießen, unter dem Einfluß der Luftverdünnung in hohen Schichten, vorliegen. Fast die Hälfte des Bandes ist der Besprechung der sogenannten sekundären Einflüsse und der physikalischen und statistischen Untersuchung der Geschoßabweichungen gewidmet. Die sehr mannigfachen Fragen, die hier zur Geltung kommen, sind mit großer Vollständigkeit aufgeführt, wenn auch naturgemäß die Behandlung der einzelnen nicht sehr ausführlich sein kann. Verhältnismäßig am weitesten durchgearbeitet ist der Einfluß der Kreiselwirkung und des Magnuseffektes auf die Geschoßbahnen.

Durch die dem Bande angefügten umfangreichen Tabellen, die in der früheren Auflage den vierten Band gebildet hatten, erfährt der vorgetragene Stoff eine notwendige Ergänzung. Wenn die oben als erwünscht hingestellte Reinigung von alt überkommenen »Methoden« weiter fortgeschritten sein wird, dürfte das Tabellenmaterial auch etwas zusammenschrumpfen oder wenigstens größere Uebersicht gewinnen. Mises. 758

KEIICHI **HAYASHI,** Prof. an der Kaiserlichen Kyushu-Universität, Japan. Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktion nebst einem Anhang Interpolations- und sonstige Formeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. V + 283 S. Preis 45 M, geb. 48 M.

Derselbe Verfasser hat vor wenigen Jahren im Anschluß an eine Untersuchung des Trägers auf elastischer Unterlage ein kleineres Tafelwerk der Kreis- und Hyperbelfunktionen herausgegeben, das vielen Beifall gefunden hat. Er hat sich daraufhin zu der größeren Arbeit entschlossen, deren Veröffentlichung jetzt vorliegt und die er, ein seltenes Beispiel aufopferungsvoller Energie, zweimal durchführen

mußte, nachdem einmal das ganze Manuskript zugrunde gegangen war. Die Tafeln, die der Springersche Verlag in vortrefflicher Weise gedruckt hat, werden bei vielen Aufgaben des angewandten Mathematikers, z. B. bei Stabilitätsuntersuchungen und ähnlichem treffliche Dienste leisten. In der Hauptsache enthält des Buch zehnstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, nebst deren natürlichen Logarithmen. Daneben eine große Reihe von Hilfstafeln z. B. für die Produkte $\operatorname{Sin} x \sin x$, eine dreizehnstellige Tafel des Logarithmus der Gammafunktion, eine achtstellige Tafel der Gammafunktion selbst. Im Anhang sind die wichtigsten Formeln über die behandelten Funktionen zusammengestellt. Mises. 759

G. **PÓLYA**, Tit. Professor an der Eidgen. Techn. Hochschule Zürich, und G. **SZEGŐ**, Privatdo ent an der Friedrich-Wilhelm-Universität Berlin. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Erster Band. Reihen. Integralrechnung. Funktionentheorie. XIV + 338 S. Preis 15 M, geb. 16,50 M. — Zweiter Band. Funktionentheorie. Nullstellen. Polynome. Determinanten. Zahlentheorie. X + 107 S. Preis 18 M, geb. 19,50 M. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. 19, 20. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925.)

Wer diese zwei Bände, von denen jeder in seiner ersten Hälfte mathematische Aufgaben, in seiner zweiten die zugehörigen Lösungen enthält, in der Erwartung zur Hand nimmt, eine Sammlung von Uebungsaufgaben vor sich zu haben, die die ältere einschlägige Literatur durch Berücksichtigung der neueren Entwicklung der Mathematik ergänzt, wird bald seinen großen Irrtum erkennen: das vorliegende Werk ist in keiner Weise eine »Ergänzung« von etwas bereits Vorhandenem, est ist vielmehr innerhalb der mathematischen — und wohl der ganzen wissenschaftlichen — Literatur eine völlig neuartige Erscheinung, zu der man ein nach Inhalt und Zweck ähnliches, und darum mit ihm vergleichbares, Buch kaum wird finden können. Die Verfasser, der Einzigartigkeit ihres Unternehmens bewußt, erörtern in einem ausführlichen Vorwort ihre Ziele — daß sie uns diese, recht hochgesteckten, Ziele vollständig erreicht und so mit ihrer Arbeit dem mathematischen Publikum ein wertvolles Geschenk gemacht zu haben scheinen, sei von vornherein freudigst betont.

»Uebungsaufgaben« im landläufigen Sinne, die die »Verdeutlichung neu erlernter Sätze und Begriffe an geeigneten Spezialfällen bezwecken«, und deren Lösung man von jedem Studenten verlangen kann, der dem Unterricht über das betreffende Gebiet aufmerksam gefolgt ist, nehmen relativ wenig Raum in dem Buche ein. Denn dieses will selbst unterrichten, und unter »unterrichten« verstehen die Autoren — mit H. Spencer — »zum eigenen Erfinden des Lernenden systematisch Gelegenheit geben«. Sie haben also das Bestreben, die »Disziplin des Denkens« zu fördern und dem »aktiven Studium« zu dienen, ein Bestreben, daß um so wertvoller sein dürfte, als heute die Mehrzahl der Studierenden, die unter dem Druck der Verhältnisse in erster Linie das möglichst schnelle Erreichen des Examenzieles im Auge hat, sich dabei auf passives Mitarbeiten der zahlreichen Pflichtvorlesungen beschränkt. Das Mittel, mit dessen Hilfe Polya und Szegö ihre Absicht erfüllen wollen und auch wirklich erfüllen, ist besonders der »organische Aufbau längerer Aufgabenreihen«, welche in »abwechselnden Anordnungen, die die Wechselfälle einer selbständigen Untersuchung widerspiegeln«, dem Leser vorgelegt werden. So wird dieser einmal mit einer Methode bekannt gemacht, indem sie »am Anfang kurz erklärt, nachher zur Lösung möglichst vielgestaltiger Aufgaben herangezogen und dabei immer mehr ausgebaut wird«, ein anderes Mal lernt er einen Satz gründlich kennen, indem dieser »am Anfang ausgesprochen (bewiesen, wenn es leicht und rasch möglich) und dann auf mannigfache Art ausgebaut und spezialisiert wird«, wieder in anderen Fällen erscheint umgekehrt »der allgemeine Satz erst nach vorangeschickten Spezialfällen und kleinen abgerissenen Bemerkungen, die zu seiner Vermutung oder zu seinem Beweis hinführen«. Das Lösen der — wie man sich nach dem Gesagten denken kann, nicht immer leichten — Aufgaben wird nicht nur durch diese systematische Anordnung, sondern auch durch eingestreute Fingerzeige erleichtert, und schließlich hat der Leser ja stets die Möglichkeit, durch gelegentliches Nachschlagen in den angegebenen Lösungen ein allzu schwieriges Hindernis zu überwinden.

Daß das Buch nicht nur dem Studenten, sondern auch dem Hochschullehrer beim Abhalten von Uebungen und Seminaren eine wertvolle und anregende Unterstützung bieten wird, darüber braucht wohl kein Wort gesagt zu werden. Aber auch ganz abgesehen von dem Gesichtspunkt des Unterrichts wird wohl jeder Mathematiker der Lektüre dieses Buches Förderung und Genuß verdanken können, sei es, daß er sich an dem Stoff, der hier in einer gewiß ganz gewaltigen Arbeit zusammengetragen ist, über ein Spezialgebiet gut informieren will, sei es, daß er auf der Suche nach besonders feinen Leckerbissen ist, die ihm hier, mit ungewöhnlichem Geschmack ausgewählt, serviert werden.

Die einzelnen Abschnitte, die wieder in Kapitel und Paragraphen untergeteilt sind, tragen folgende Ueberschriften: 1. Unendliche Reihen und Folgen. 2. Integralrechnung. 3. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Allgemeiner Teil. 4. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Spezieller Teil. 5. Die Lage der Nullstellen. 6. Polynome und trigonometrische Polynome. 7. Determinanten und quadratische Formen. 8. Zahlentheorie. 9. Einige geometrische Aufgaben. Fast alle mathematische Disziplinen werden zum mindesten ge-

streift; so wird auch der für die Anwendungen besonders interessierte Mathematiker sein Gebiet nicht vergebens suchen: z. B. wird der Grad der Annäherung bei der Auswertung von Integralen behandelt (Bd. 1, S. 36 ff.), conforme Abbildungen werden vom Standpunkt der Hydrodynamik aus betrachtet (Bd. 1, S. 99 ff.), und die Aufgaben aus der Geometrie (9. Abschn.) gehören zum Teil der Statik an.

Fassen wir es noch einmal zusammen: alle Kreise von Mathematikern haben Veranlassung, das Erscheinen dieses Werkes aufs Freudigste zu begrüßen.

Berlin. H. Hopf. 740

Ferner sind folgende Werke bei der Schriftleitung eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. WALTHER **GERLACH,** o. ö. Prof. der Physik an der Universität Tübingen. Materie, Elektrizität, Energie, Grundlagen und Ergebnisse der experimentellen Atomforschung. Zweite erweiterte Auflage. Mit 119 Figuren. Wissenschaftliche Forschungsberichte. Naturwissenschaftliche Reihe Bd. VII. Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1926. XI + 291 S. Preis geh. 15 *M*, geb. 16,50 *M*.

Besprechung der 1. Auflage s. diese Zeitschr., Bd. 5 (1925), S. 86.

Dr. J. **FRANCK,** Prof. an der Universität Göttingen, und Dr. P. **JORDAN,** Assistent am Physikalischen Institut Göttingen. Anregung von Quantensprüngen durch Stöße. Mit 51 Abb. Struktur der Materie in Einzeldarstellungen Bd III. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. VIII + 312 S. Preis geh. 19,50 *M*, geb. 21 *M*.

Dipl.-Ing Dr. ALBERT **BETZ,** Leiter der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Wind-Energie und ihre Ausnutzung durch Windmühlen. Mit 46 Abb. im Text und auf 4 Tafeln nebst vielen Tabellen. Verlag von Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1926. V + 64 S. Preis 3,80 *M*.

Dr.-Ing. FRANZ **OLLENDORFF,** Charlottenburg. Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik. Eine Einführung in die Theorie. Mit 379 Abb. im Text und 3 Tafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. XXI + 639 S. Preis geb. 36 *M*.

HANS RUDOLF **KARG,** Obering. Pneumatische Materialtransporte unter besonderer Berücksichtigung der Späneabsauge-Anlagen. Ein neues praktisches Berechnungsverfahren. Mit 7 Tabellen, 3 Rohrplänen, 1 Exhaustor-Konstruktionszeichnung, Normalien für Einzelwiderstände und vielen Beispielen. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1927. VI + 46 S. Preis 3 *M*.

Dr-Ing. P. **WERKMEISTER,** ord. Prof. an der Technischen Hochschule Dresden. Vermessungskunde I. Stückmessung und Nivellieren. Mit 140 Abb. Vierte Auflage. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1926. 156 S. Preis 1,50 *M*.

MORITZ **PASCH,** Prof. an der Universität Gießen. Vorlesungen über neuere Geometrie. Zweite Auflage. Mit einem Anhang: Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung von Max Dehn, Prof. an der Universität Frankfurt a. M. Mit insgesamt 115 Abb. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band XXIII. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. X + 275 S. Preis geh. 16,50 *M*, geb. 18 *M*.

Prof. P. **LANGER** und Dipl.-Ing. W. **THOMÉ,** Anleitung zu maschinentechnischen Messungen und Untersuchungen. Mit 19 Abb. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1926. 24 S.

Dr.-Ing. H **KREY,** Oberbaurat in Berlin. Die Flutwelle in Flußmündungen und Meeresbuchten. Eine rechnerische Behandlung ihrer Geschwindigkeit, ihrer Strömungen und ihres Arbeitsvermögens. Mit 40 Textabbildungen. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau in Berlin Heft 3. Eigenverlag der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin 1926. 59 S.

MARTIN **GRÜNING,** ord. Prof. an der Technischen Hochschule Hannover. Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung. Mit 6 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. 30 S. Preis 3,30 *M*.

NACHRICHTEN

Hofrat Professor Dr. Emanuel Czuber †. Am 22. August 1925 ist Emanuel Czuber im Alter von 74 Jahren, hochbetagt und doch zu früh, für immer von uns gegangen.

Czuber wurde 1851 in Prag geboren, wo er auch seine Jugendjahre verbrachte, die Volks- und Realschule und die Ingenieurfachabteilung am Deutschen Polytechnikum absolvierte. 1875 legte er die Lehramtsprüfung für Mathematik und Darstellende Geometrie ab; 1878 wurde er wirklicher Lehrer an der II. Deutschen Oberrealschule in Prag und im selben Jahre habilitierte er sich an der Deutschen Technischen Hochschule für »Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung«. Acht Jahre später wurde er, erst 35 Jahre alt, zum ordentlichen Professor der Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn berufen, im Herbst 1891 übernahm er die Lehrkanzel für Mathematik II an der Technischen Hochschule in Wien, der er als Professor bis zum vollendeten siebzigsten Lebensjahre angehörte. Im Studienjahre 1890/91 war Czuber Rektor in Brünn, 1894/95 in Wien. Krankheit und Alter konnten ihn nicht

hindern, seine erfolgreichen wissenschaftlichen Arbeiten fast bis zu seinem Tode fortzusetzen.

Czuber hat die wissenschaftliche Erfassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer Anwendungen um ein gewaltiges Stück vorwärtsgebracht. Dabei hat er sich aber nicht auf das enge theoretische Gebiet seiner Spezialwissenschaft beschränkt, sondern hat mit vieler Mühe, aber auch mit großem Erfolge gerade die Verbindung mit anderen Wissenszweigen gesucht. Darum finden wir in seinen Werken die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Fehler- und Ausgleichungsrechnung, auf Geodäsie und Versicherungswesen, auf Probleme der Bevölkerungstheorie, aber auch Anwendungen auf die Landwirtschaft.

In den 1884 erschienenen »Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte« gab Czuber als erster eine systematische Darstellung der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Geometrie. Auch seine »Theorie der Beobachtungsfehler«, Leipzig 1891, fand in der Fachwelt die günstigste Beurteilung.

1899 erschien der im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung verfaßte Bericht »Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen«, aus dem später der Enzyklopädie-Artikel über Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorging. In diesem Bericht, dessen philosophischer Seite ganz besondere Aufmerksamkeit gewidmet ist, werden die Grundlagen der Theorie sowie ihre Anwendungen auf die Statistik, auf Messungsresultate, auf Zeugenaussagen und gerichtliche Entscheidungen umfassend erörtert.

Sein Lebenswerk aber ist die »Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung«, in welchem er den Begriff der relativen Wahrscheinlichkeit aus der Mengenlehre heranzog und der Kollektivmaßlehre den gebührenden Platz einräumte. In diesem Werke war der Verfasser namentlich darauf bedacht, die philosophische Seite des Gegenstandes tiefer zu fassen.

In seinen letzten Jahren vollendete er in Gmigl bei Salzburg, wohin er sich nach seiner Pensionierung zurückgezogen hatte, drei große und verdienstvolle Arbeiten: »Die statistischen Forschungsmethoden«, »Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung« und die »Mathematische Bevölkerungstheorie«.

Eine große Zahl weiterer wissenschaftlicher Arbeiten ist in den Sitzungsberichten der Akademien in Wien und München und in mathematischen und versicherungstechnischen Zeitschriften zerstreut.

Die Leistungen Czubers auf dem Gebiete der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung haben allgemein die verdiente Anerkennung gefunden, sie haben ihn zu einem der führenden Statistiker Mitteleuropas gemacht und sein Name wurde rasch in den Fachkreisen der ganzen Welt bekannt. Seine Werke werden ihn überleben, denn die Forscher auf diesem Gebiete werden immer wieder auf Czubers Arbeiten zurückgreifen müssen. Die Wertschätzung, die er als Fachmann genoß, zeigte sich besonders anläßlich des Versicherungstechnischen Kongresses zu Wien im Jahre 1909, dessen Leitung ihm übertragen wurde.

Auch auf rein mathematischem Gebiete hat sich Czuber literarisch betätigt. Es sei hier nur seiner ausgezeichneten Lehrbücher gedacht, der »Einführung in die höhere Mathematik« und der »Vorlesungen über die Differential- und Integralrechnung«, von denen das erste bisher drei, das letzte vier Auflagen erlebt hat. Diese Werke sind als wertvolle Studienbehelfe bekannt und zeichnen sich durch Kürze, Strenge und Klarheit, durch Betonung des Wesentlichen, kurz gesagt durch einen klassisch mathematischen Stil aus.

Große Verdienste hat sich Czuber um die Ausgestaltung des Unterrichtswesens in Oesterreich erworben. Als Mittel- und Hochschullehrer hatte er den richtigen Einblick in die Bedürfnisse beider Schulgattungen und konnte als Redakteur der »Zeitschrift für das Realschulwesen« und als Experte im n. ö. Landesschulrat sowie als Professor der Technischen Hochschule manchen wertvollen Vorschlag über die Ausgestaltung des Unterrichtes an diesen Anstalten machen. In seiner Studie »Gedanken über eine Reform der Technischen Hochschulen« 1913 tritt Czuber besonders für eine gründliche Ausbildung in den grundlegenden Wissenschaften ein. Ihm ist auch die Schaffung des »Versicherungstechnischen Kurses« an der Wiener Technischen Hochschule im Jahre 1894 zu verdanken.

Zum Schlusse sei noch des herrlichen Menschen und Studentenfreundes gedacht, den wir in Czuber verloren haben. Jedem seiner Schüler ist die ruhige und klare Art seines Vortrages in Erinnerung, die lebendige Darstellung der spröden Materie, die er so trefflich zu meistern verstand. Alle wissen, welch warmfühlender Freund der Studentenschaft er war und wieviel er durch tatkräftige Förderung verschiedener Wohlfahrtseinrichtungen zur Linderung der Not armer Studenten beigetragen hat.

Wir beklagen in Czuber nicht nur eine Leuchte der Wissenschaft und einen Führer in Fragen der Hochschule, sondern auch einen großen Lehrer und Menschen.

* * *

Zum Schluß seien noch die wichtigsten der selbständig erschienenen wissenschaftlichen Werke Czubers zusammengestellt:

Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung von A. Meyer, übersetzt von Czuber, 1879.

Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, 1884.

Zum Gesetz der großen Zahlen, 1889.

Theorie der Beobachtungsfehler, 1891.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 1. Aufl. 1898.

Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen, 1899.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 1. Aufl. 1902.

Die Kollektivmaßlehre, 1908.
Einführung in die höhere Mathematik, 1. Aufl. 1909.
Die Zukunft des Versicherungswesens in Oesterreich, 1913.
Die statistischen Forschungsmethoden, 1921.
Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1923.
Mathematische Bevölkerungstheorie nach G. H. Knibbs, 1923.

Wien. E. Doležal. 755

Optischer Kongreß in London 1926. Unter dem Vorsitz von Sir Frank Dyson fand im April 1926 in London ein englischer Kongreß der an der wissenschaftlichen Optik interessierten Personen und Verbände statt. In zwei stattlichen Bänden liegen jetzt die auf dem Kongreß gehaltenen Vorträge veröffentlicht vor[1]). Sie betreffen alle Fragen der praktischen Optik sowohl vom Standpunkt der Instrumentenherstellung, wie von dem der verschiedenen Anwendungsgebiete.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. In der Sitzung der Berliner Ortsgruppe am 4. Februar sprach Hr. Dr. G. Sachs vom Kaiser-Wilhelm-Institut für Metallforschung über »Technologische Eigenschaften von Aluminium-Kristallen«. Der Vortrag, der durch zahlreiche Lichtbilder erläutert wurde, fand lebhaftes Interesse. Am 20. Februar findet eine Besichtigung des neu errichteten Planetariums der Stadt Berlin statt.

Am 1. Februar hielt die neugegründete Ortsgruppe Göttingen ihre konstituierende Sitzung ab. Zum Vorsitzenden wurde Prof. Dr. L. Prandtl, zum Schriftführer Prof. Dr. A. Nádai gewählt. Herr Prof. Courant hielt einen Vortrag über »Verschiedene Anwendungen direkter Methoden der Analysis«. Briefe an die Ortsgruppe werden unter der Anschrift Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, Böttingerstr. 6, erbeten.

Persönliches. Am 3. Januar 1927 starb in Göttingen Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Runge im 71. Lebensjahre. Er war der hervorragendste unter den Vertretern der angewandten Mathematik in Deutschland. Seine vielseitige wissenschaftliche und persönliche Bedeutung ist erst in einem unserer letzten Hefte aus Anlaß seines siebzigsten Geburtstages ausführlich geschildert worden[2]). Wir werden auf das Lebenswerk des Dahingeschiedenen noch zurückkommen.

Herr Prof. Dr. Kyrill Popoff in Sofia ist von der Pariser Akademie der Wissenschaften für seine ballistischen Arbeiten[3]) durch Verleihung des Preises Montyon ausgezeichnet worden. Er wird im kommenden Semester wieder Gastvorlesungen an der Pariser Universität halten.

Herr Dr.-Ing. W. Bauersfeld, Direktor der Zeiß-Werke in Jena, ist zum Honorarprofessor an der Universität Jena ernannt worden und wird Vorlesungen über Sondergebiete der technischen Physik halten.

Herr Dr. O. Mader, Oberingenieur der Junkers-Werke in Dessau ist zum ord. Professor der Mechanik an der technischen Hochschule in München ernannt worden und wird auch Vorlesungen über Flugtechnik halten. 761

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Belastungsverhältnis und Gleitgeschwindigkeit bei Reibungsgetrieben. Die Arbeit des Herrn W. Heyn, Graz: Belastungsverhältnis und Gleitgeschwindigkeit bei Reibungsgetrieben (Zamm 1926 H. 4) veranlaßt mich zu folgenden Bemerkungen:

Der Versuch, den Schlupf eines Reibungsgetriebes mit Hilfe der Annahme einer Schrägstellung der Scheiben zu berechnen, ist sicher wertvoll, auch wenn im Ansatz Starrheit der Scheiben vorausgesetzt wird. Die Rechnung ist natürlich als eine erste Näherung zu betrachten, denn im allgemeinen Falle wird man

$$W = -\int \mu p \cdot \cos\delta \, dF \quad \ldots \quad (1\,a)$$

zu setzen haben (p = Druck auf das Flächenelement dF). Darin wird $D\cos\delta$ keine Konstante sein, weil in Gl. (2) v und v_r in der Berührungsfläche variabel sind. Um so interessanter ist, daß Gl. (3), welche nach Beseitigung eines Druckfehlers die Gestalt

$$\mu = -\frac{W}{P \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v \sin\alpha}{v_r}\right)^2}} \quad \ldots \quad (3)$$

hat, bei Gültigkeit des Coulombschen Reibungsgesetzes einigermaßen genau die Versuche von Sachs und Jahn wiedergibt, wenn man für die Schrägstellungswinkel α geeignete Werte wählt. Bei Gebrauch des von mir[4]) eingeführten Nutzungswertes $\nu = -\frac{W}{\mu \cdot P \cos\alpha}$ und des Schlupfes $s = \frac{v_\vartheta}{v \cdot \cos\alpha}$ erhält man aus (3)

$$s = \sin\alpha \cdot \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \cos^2\alpha}} \quad (0 \leq \nu \leq 1) \quad . \quad (3\,a)$$

als Gleichung der Schlupfkurve.

[1]) **Published by the optical convention, 1 Lowther gardens, exhibition road, London SW 7.**

[2]) **Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 423/424.**

[3]) **Vergl. auch diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 96 bis 106.**

[4]) **Fromm, Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben. Vergl. dieses Heft, S. 48.**

Läßt man α nach Null gehen, so geht damit nach Gl. (2) entweder δ oder v_r nach Null. Aus Gl. (3) folgt also durch Grenzübergang für $\alpha \longrightarrow 0$ nicht etwa Gl. (4) allgemein, sondern für Gl. (4) ist notwendig und hinreichend, daß $\delta = 0$ ist. Für $\alpha = 0$ und $v_r = 0$ hat aber ein Winkel δ überhaupt keinen Sinn, da ja ein Gleiten nicht stattfindet und die Reibung eine Reaktionskraft ist. Vielmehr springt δ auf $-\delta$, wenn α unter Vorzeichenwechsel den Wert Null bei konstantem P, W und v durchläuft (man stelle sich die in Bezug auf die Rollebene II symmetrische Stellung zu Abb. 1 vor), und daher ergibt Gl. (5a) keinen eindeutigen, endlichen Grenzwert von $\frac{d v_r}{d \alpha}$ für $\alpha = 0$. Somit dürfte eine Unverträglichkeit des Coulombschen Reibungsgesetzes mit den Gesetzen der Mechanik hier wohl nicht vorliegen.

Die falsche Benutzung der Gl. (4) hat auch in der weiteren Rechnung eine inkorrekte Schlußweise zur Folge. Die Ergebnisse werden aber richtig. Bei ihrer Bewertung ist zu beachten, daß ein Gesetz nach Abb. 2, welches einen von Null verschiedenen Grenzwert $\lim \mu = \lim \Phi (v_r)_{v_r \to 0} = a$ hat, das Coulombsche Gesetz als den Sonderfall $\Phi (v_r) = a \; (v_r > 0)$ enthält. Jedes derartige Gesetz hat also an der Stelle $v_r = 0$ dieselbe Unstetigkeit bezw. Vieldeutigkeit wie das Coulombsche Gesetz. Mit der Folgerung aus Gl. (7), daß für $\alpha = 0$ und $v_r = 0$ reines Rollen stattfindet, widerspricht also Herr Heyn selbst seiner früheren unrichtigen Behauptung, das Coulombsche Gesetz sei mit den Gesetzen der Mechanik unverträglich, scheinbar ohne es zu merken.

Die Versuchsergebnisse von Jacob, die durch die starkgezogene Kurve in Abb. 3 dargestellt werden, lassen auch eine Extrapolation nach Abb. 2 ohne Zwang zu. Ein Abfall der Gleitreibung auf Null kann nicht als nachgewiesen gelten. Auch die Schlupfkurven nach Jahn und Sachs bieten hierzu keinen sicheren Anhalt, wie ich nachgewiesen habe.

Berlin-Spandau, den 16. August 1926.

H. Fromm. 717

* * *

Erwiderung. Ich danke Hrn. Dr. Fromm für die Berichtigung des Druckfehlers in Gl. (3) und bin ihm verbunden, daß er mir Gelegenheit gab, die, wie ich zugeben muß, im Nachgang zu Gl. (5a) vorhandene ungenaue Ausdrucksform und damit den scheinbaren Widerspruch mit Gl. (7) zu klären.

Gl. (5a) ergibt unter den gemachten Voraussetzungen für $\frac{d v_r}{d \alpha}$ einen eindeutigen, endlichen Wert und schließt eine Unstetigkeit in der Richtung der Aenderung von v_r mit α aus. Somit muß für $\alpha = 0$ die Gleitgeschwindigkeit nach 2) verschwinden und reines Rollen eintreten. Die Richtung der Aenderung von v_r beim Uebergang $\alpha \longrightarrow 0$ ist an den Winkel δ gebunden, womit auch die Richtung der Reibung für diesen Uebergang festgelegt ist. Ich kann mir wohl eine Unstetigkeit im Verhalten von μ vorstellen, wobei die Reibung nur hinsichtlich ihres Größenwertes geändert wird, halte aber eine Unstetigkeit hinsichtlich ihrer Richtung für ausgeschlossen. Da für $\alpha = 0$ sämtliche wirkenden äußeren Kräfte in die Rollebene fallen und eine axial gerichtete Kraft nicht mehr vorhanden sein kann, also auch für $W < P . \mu$ die Richtung der Haftreibung in der Rollebene liegen muß, kann eine Uebereinstimmung mit den Forderungen der Mechanik nur erzielt werden, wenn man beim Uebergang $\alpha \longrightarrow 0$ einen Sprung des $\measuredangle \delta$ auf Null zuläßt. Wird aber δ zu Null, so gestattet Gl. (2) wegen der Unbestimmtheit $v_r = v . \frac{0}{0}$ für v_r auch einen endlichen Wert, wobei Gl. (4) erfüllt sein muß. Die Annahme, wonach μ unabhängig von v ist, führt für den besprochenen Sonderfall zu Schlüssen, die nur durch die weitere Annahme einer Unstetigkeit trotz des differentialen Ueberganges $\alpha \longrightarrow 0$ gerechtfertigt werden können.

Gl. (7) enthält gemäß seiner Ableitung auch das Coulombsche Reibungsgesetz, jedoch nur innerhalb des Geltungsbereiches der Gl. (4). Für $\alpha = 0$ und $v_r = 0$ ergibt Gl. (7) mit $-W \leqq P . \mu$ eine volle Unbestimmtheit und läßt einen Schluß über das Verhalten von δ nicht zu.

Damit habe ich mit andern Werten das Gleiche gesagt, was ich im Nachgang zu 5a bezw. 7 ausdrücken wollte, muß allerdings zugeben, daß die Bemerkungen über $W < P . \mu$ (Zeile 4 bzw. 6 nach 5a) insofern nicht deutlich sind, als sich diese Ungleichung einmal für $\delta > 0$ im zweiten Fall für $\delta = 0$ versteht.

Die von Herrn Dr. Fromm aus den Versuchen von Jahn und Sachs ermittelte Schlupfkurve mit $\mu = \text{const}$ und $\sin \alpha = 0{,}0013$ erscheint mir im Hinblick auf die Streuung der Versuchswerte und des nur wenige Bogenminuten betragenden Wertes von α nicht sichergestellt. Die Versuche von Kimball[1]), Jakob und Florig[2]), bei welchen der Einfluß eines Schrägstellungswinkels α ausgeschlossen ist und welch Letztgenannte nur unter rein technischen Voraussetzungen angestellt wurden, bestätigen vielmehr die Annahme der Gl. (6). Insbesondere berichtet Herr Dr. Florig, daß für seinen Fall die Kurve der Reibungskoeffizienten durch den Nullpunkt geht und der sogenannte »Reibungskoeffizient der Ruhe« gleich Null angenommen werden muß.

Graz, am 23. Dezember 1926.

W. Heyn. 717a

(Hr. Dr. Fromm verzichtet auf nochmalige Erwiderung, ohne den Ausführungen von Hrn. Dr. Heyn zuzustimmen. Der Herausgeber.)

[1]) **A. G. Kimball: A new Investigation of one of the Laws of Friction. Americ. Jour. of Science and Arts 1877, Bd. XIII.**

[2]) **Florig, Bericht über Versuche zur Ermittlung des Reibungskoeffizienten von Belagmaterial trockenlaufender Automobil-Motorenkupplungen. Auto-Technik vom 30. Mai 1926.**

(Redaktionsschluß 10. Februar 1927.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.